Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1610(/5B1118), DISKRET MATEMATIK för CL, Media (m.fl.)
måndagen den 30 maj 2011, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Betygen A–E gäller för **kurs SF1610** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1118** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 12p** totalt, får Fx(/K) och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.
OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

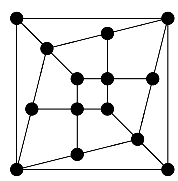
1) (3p) Finn alla heltal x så att $12x + 13 \equiv 10 \pmod{51}$.

2) (3p) Bland 10 (särskiljbara) barn skall 25 bullar, 23 små (identiska) och två stora (särskiljbara), fördelas så att varje barn får minst en bulle och Lisa (som fyller år) får en stor bulle (och noll eller fler små).
På hur många sätt kan bullarna fördelas om inga bullar får bli över?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra vanliga räknesätten.)

3) Permutationen $\pi \in S_9$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 9\}$) ges av
$\pi(1)=7,\ \pi(2)=8,\ \pi(3)=9,\ \pi(4)=6,\ \pi(5)=3,\ \pi(6)=2,\ \pi(7)=1,\ \pi(8)=4,\ \pi(9)=5.$
a) (2p) Skriv π och π^2 på cykelform och ange π:s och π^2:s ordningar .
b) (1p) Ange på cykelform ett $\sigma \in S_{10}$ med maximal ordning, dvs så att $o(\sigma) \geq o(\tau)$ för alla $\tau \in S_{10}$. Ange också detta σ:s ordning.

4) En linjär binär kod ges av kontrollmatrisen (checkmatrisen) $H = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{bmatrix}$.
a) (1p) Vilket kodord kan med högst ett fel bli 010110?
b) (2p) Finn ett ord som inte kan uppstå med högst ett fel i ett kodord.

5) (3p) Har vidstående graf någon hamiltonstig?
Rita antingen en tydlig figur med ett exempel på en eller visa att ingen finns.



Vänd!

DEL II

6) Man vill skapa ett RSA-system för kryptering med de ”stora” primtalen $p = 61$ och $q = 97$, dvs parametern $n = 61 \cdot 97 = 5917$.
Krypteringsexponenten e skall uppfylla $1 < e \leq 5000$.
a) (1p) Ange alla primtal ≤ 5000 som inte kan användas som e.
b) (3p) Hur många möjliga e finns det?
Svaret får ges som en summa av heltal.

7) (4p) Låt som vanligt Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \text{för } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Visa att

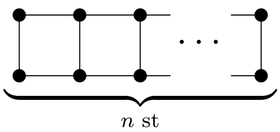
$$F_0F_1 + F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = (F_{2n})^2 \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

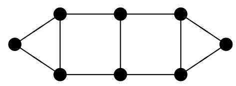
8) (4p) Visa att det finns (minst) ett heltal $n \geq 1$ så att 147^n (skrivet i bas 10) slutar på 0000000001 (dvs så att $10^{10} \mid 147^n - 1$).
(Du behöver inte finna något sådant n.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Låt G_n vara den övre grafen härintill (totalt $2n$ hörn) och $P_n(\lambda)$ det kromatiska polynomet för G_n (dvs $P_n(\lambda)$ för $\lambda \in \mathbb{N}$ är antalet olika hörnfärgningar av G_n med högst λ färger).
a) (2p) Finn $P_1(\lambda)$ och $P_2(\lambda)$.
b) (2p) Finn $P_n(\lambda)$ för godtyckligt $n = 1, 2, \ldots$
c) (1p) På hur många sätt kan man (hörn)färga den undre grafen härintill med högst 4 färger?
Svaret får innehålla heltal, potenser och produkter.





10) Bakgrund: En känd sats av Cauchy säger att om G är en ändlig grupp och p ett primtal som delar gruppens ordning, $p \mid |G|$, så finns ett $g \in G$ med ordning $o(g) = p$ (dvs $g^p = 1, \ g^k \neq 1$ för $k = 1, 2, \ldots, p-1$).
Uppgift: Låt gruppen G ha ordning $|G| = 143 (= 11 \cdot 13)$.
a) (1p) Vilka värden är möjliga för elementens i G ordningar, $o(g)$ för $g \in G$?
b) (4p) Visa, utan att använda Cauchys sats, att det finns $g, h \in G$ med ordningar $o(g) = 11, \ o(h) = 13$.
Ledning: Antag motsatsen och betrakta de delgrupper som genereras av gruppens element.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.
Där kommer så småningom också en kursenkät, fyll i den!