Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE, CL2 och Media 1, SF1610 och 5B1118, onsdagen den 17 augusti 2011, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar x och y till den diofantiska ekvationen $258x + 496y = 8$.

2. (3p) En klass med åtta flickor och åtta pojkar skall utse en grupp om fem klassrepresentanter. På hur många olika sätt kan man sätta samman en grupp av klassrepresentater i denna klass om alla flickor utom flickorna B och C vägrar vara med om pojken A utses. För full poäng krävs att svaret ges i formen av ett heltal.

3. (3p) Bestäm tre olika delgrupper till gruppen $G = (Z_{24}, +)$ som samtliga innehåller elementet 6.

4. (a) (2p) Ett RSA-krypto har parametrarna $n = 51$, $e = 3$. Dekryptera meddelandet 2, dvs bestäm $D(2)$.
   (b) (1p) Ett RSA-kryto har parametern $n = 51$. Ange samtliga möjliga värden på parametern e som man kan välja till detta val av parametern n.

5. (3p) I en planär sammanhängande graf med 11 noder (hörn) har noderna valenserna (graderna) 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5 och 6. Bestäm antal områden som uppstår vid en plan ritning av grafen, ytterområdet medräknat.

DEL II

6. (3p) Bestäm antalet hela tal n mellan 1 och 1000, dvs $1 \leq n \leq 1000$, som inte är delbara med något av talen 4, 6 eller 8.

7. (3p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att lösningen till rekursionsekvationen

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} \qquad n = 2, 3, \ldots ,$$

med begynnelsevärdena $a_0 = 7$ och $a_1 = 4$, ges av talföljden $a_n = 5 \cdot 2^n + 2(-3)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

8. (a) (1p) Bestäm en abelsk (kommutativ) icke-trivial delgrupp till gruppen $\mathcal{S}_3$ av permutationer på mängden $\{1, 2, 3\}$
   (b) (2p) Bevisa att varje icke-abelsk (icke-kommutativ) grupp G har minst två olika abelska icke-triviala delgrupper.
   (c) (2p) Är påståendet i deluppgiften ovan sant för abelska grupper. Motivera ditt svar!

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. I kursen behandlas bl a binära felrättande koder och hur sådana kan konstrueras med hjälp av så kallade kontrollmatriser (parity-check matriser). Detta kan generaliseras till ternära felrättande koder, vars ord bildas med hjälp av symbolerna 0, 1 och 2. Tex kommer de kolonner som multiplicerade med matrisen $\mathbf{H}$ nedan

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ger nollkolonnen, om man räknar modulo 3, att utgöra en felrättande ternär kod C.

   (a) (2p) Ge vettiga definitioner av avstånd och felrättning, bestäm antal fel koden C ovan kan rätta, hur många ord koden har och hur många ternära ord av längd fyra som koden C inte kan rätta.
   (b) (3p) Finns det någon ternär 1-felsrättande kod med 3^{10} ord och vars ord har längden 13? Motivera ditt svar!

10. (a) (1p) Visa att om alla noder (hörn) i en bipartit graf har valensen (graden) 2 så kan kanterna färgläggas i färgerna 0 och 1 på ett sådant sätt att vid varje nod inträffar precis en kant av vardera färgen.
   (b) (2p) Visa att motsvarande påstående gäller om alla noder i en bipartit graf har valensen $k = 3$ och färgerna är 0, 1 och 2.
   (c) (2p) Gäller ett motsvarande påstående generellt om alla noder i en bipartit graf har valensen $k > 3$.