Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE, CL och CMETE, SF1610 och 5B1118, lördagen den 28 januari 2012, kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

För ett godkänt resultat krävs också minst 12 poäng på del I.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående fem uppgifter på del I svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på kontrollskrivning nr i under 2011 ger automatiskt full poäng på uppgift nr i nedan. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen
$$59x + 73y = 2.$$

2. (3p) I en klass med 10 flickor och 12 pojkar skall man utse ett klassråd med fem barn. Hur många möjligheter finns det för ett sådant klassråd om det måste finnas med minst en flicka och minst en pojke i klassrådet. För full poäng krävs att svaret ges som ett heltal, men glöm ej att motivera din lösning.

3. (3p) Undersök om gruppen $G = (Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är en cyklisk grupp.

4. (3p) Ett RSA-krypto har parametrarna $n = 91$ och $e = 29$. Dekryptera meddelandet 3, dvs bestäm $D(3)$.

5. (3p) En sammanhängade planär graf har totalt nio noder varav fyra noder med valensen 2, två noder med valensen 3, en nod med valensen 4 och två noder med valensen 5. Vilka möjligheter finns det för antalet områden som uppstår vid en plan ritning av grafen, om ytterområdet skall räknas med.

DEL II

6. (3p) Bestäm antalet funktioner f från mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ till mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som är sådana att $|\{f(1), f(2), f(3)\}| = 3$. För full poäng krävs att svaret ges som ett heltal, men glöm ej att motivera din lösning.

7. (4p) Antag att skogen T har 100 noder varav minst 27 av noderna har valensen (graden) 3. Bestäm det maximala antalet träd som kan finnas i denna skog.

8. (4p) Antag G är en abelsk grupp, dvs $ab = ba$ för alla element a och b i G. Låt $\sigma(g)$ beteckna ordningen av elementet g i G. Visa att om $\text{sgd}(\sigma(a), \sigma(b)) = 1$ så är $\sigma(ab) = \text{mgm}(\sigma(a), \sigma(b))$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. För en 1-felsrättande kod C av längd n så låter vi $D(C)$ beteckna mängden av ord som C inte kan rätta, dvs $D(C)$ består av de ord av längd n vars avstånd är minst två till alla kodord.

   (a) (2p) Låt C vara den 1-felsrättande kod som har nedanstående matris som kontrollmatris:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Visa att orden i mängden $D(C)$ bildar en 1-felsrättande kod, som inte är linjär.

   (b) (3p) Låt C vara en linjär 1-felsrättande kod av längd n och med $|C| = 2^{n-m}$ ord. Gäller det generellt att om kodens kontrollmatris har m rader och $n = 2^m - 2$ kolonner så kommer orden i mängden $D(C)$ att utgöra en 1-felsrättande kod?

10. (5p) Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vi låter på sedvanligt sätt $\mathcal{S}_n$ utgöra en grupp. Bestäm en formel för antalet delgrupper av ordning p till $\mathcal{S}_n$ i de fall då p är ett primtal.