KTH, Matematik
Gunnel Roman

SF 1612 Matematik baskurs

Dag och tid: Måndag den 20 okt 2008 kl 8.00 – 13.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 3 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 4 - 6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 7 - 9 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 31 poäng varav minst 8 VG-poäng
B - 26 poäng varav minst 5 VG-poäng
C - 21 poäng varav minst 2 VG-poäng
D - 16 poäng, E - 15 poäng och Fx - 13 poäng.

Lycka till!!

----------------------------Uppgifter som motsvarar varsin KS----------------------

1. Lös olikheten $x + |3x - 2| \geq |1 - x| + 3$.

2. Förenkla så långt som möjligt $2\ln\sqrt{x+a} + 2\ln\sqrt{x-a} - \ln\sqrt{x^2 - a^2}$.

3. Lös ekvationen $2\cos^2 x = \cot x$.

-------------------------------------G – uppgifter--

4. Bestäm a så att koefficienten framför $x^6 y^9$ i utvecklingen av $(ax^2 - y^3)^6$ blir -160 .

5. Lös ekvationen $\ln(1+e^x) = \ln(1-e^x) + \ln(1+4e^x)$

6. Visa att $8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$.

-------------------------------------VG-uppgifter--

7. Bestäm om den existerar inversfunktionen till funktionerna nedan. Ange även definitionsmängd och värdemängd till f(x) samt till ev. inversfunktion.

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \tan 2x$.

8. Bevisa på två olika sätt att $1 + 4 + 7 + ... + 3n - 2 = \dfrac{n}{2}(3n-1)$, $n \geq 1$.

   Det ena sättet skall vara med induktion.

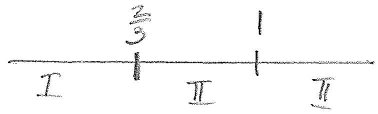
9. Visa att $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh 2x$. $\cosh^4 x = (\cosh x)^4$ och

   $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1.

$$x + |3x-2| \geq |1-x| + 3$$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) & 3x-2 < 0 \end{cases} \qquad |1-x| = \begin{cases} 1-x & 1-x \geq 0 \\ -(1-x) & 1-x < 0 \end{cases}$$



I $\quad x < \frac{2}{3}$

$$x - (3x-2) \geq 1-x+3$$
$$-2x+2 \geq 4-x$$
$$-x \geq 2$$
$$x \leq -2 \in I$$

II $\quad \frac{2}{3} \leq x < 1$

$$x + 3x - 2 \geq 1-x+3$$
$$5x \geq 6$$
$$x \geq \frac{6}{5} \notin II$$

SVAR! $x \leq -2$ ELLER $x \geq \frac{4}{3}$

III $\quad x \geq 1$

$$x + 3x - 2 \geq -(1-x) + 3$$
$$x + 3x - 2 \geq -1 + x + 3$$
$$3x \geq 4$$
$$x \geq \frac{4}{3} \in III$$

2.

$$2\ln\sqrt{x+a} + 2\ln\sqrt{x-a} - \ln\sqrt{x^2-a^2} =$$
$$= 2\ln(x+a)^{\frac{1}{2}} + 2\ln(x-a)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln(x+a) + 2\cdot\frac{1}{2}\ln(x-a) - \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) =$$
$$= \ln(x+a) + \ln(x-a) - \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) =$$
$$= \ln(x+a)(x-a) - \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) =$$
$$= \ln(x^2-a^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) = \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$$
$$= \ln\sqrt{x^2-a^2}$$

SVAR! $\ln\sqrt{x^2-a^2}$

3. $2\cos^2 x = \cot x$

$2\cos^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\quad \sin x \neq 0$

$x \neq n \cdot \pi$

$2\cos^2 x \sin x = \cos x$

$\cos x(2\cos x \sin x - 1) = 0$

1) $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

2) $2\cos x \sin x - 1 = 0$

$\sin 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

SVAR: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \end{cases}$

---

4. $(ax^2 - y^3)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (ax^2)^{6-k} \cdot (-y^3)^k$, KOEFF FÖR $x^6y^9 = -160$

$(ax^2)^{6-k} = a^{6-k} \cdot x^{2(6-k)} = a^{6-k} x^{12-2k} \Rightarrow 12 - 2k = 6$

$2k = 6$

$k = 3$

alt. $(-y^3)^k = (-y)^{3k} \Rightarrow 3k = 9$

$k = 3$

$\therefore$ $k = 3$

$\binom{6}{3}(ax^2)^3 \cdot (-y^3)^3 = \left| \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20 \right|$

$= 20a^3x^6 \cdot -y^9 = -20a^3x^6y^9$

$\therefore$ $-20a^3 = -160$

$a^3 = 8$

$a = 2$

SVAR! $a = 2$

---

5. $\ln(1+e^x) = \ln(1-e^x) + \ln(1+4e^x)$

$1 + e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > -1$

$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1$

$1 + 4e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > -\frac{1}{4}$

$\ln(1+e^x) = \ln(1-e^x)(1+4e^x)$

$1 + e^x = (1-e^x)(1+4e^x)$

$1 + e^x = 1 + 4e^x - e^x - 4e^{2x}$

$4e^{2x} - 2e^x = 0$

$2e^x(2e^x - 1) = 0$

1) $2e^x = 0$ EJ DEF

2) $2e^x - 1 = 0$

$e^x = \frac{1}{2}$

$x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$

SVAR! $x = -\ln 2.$

6. VISA ATT $8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$

$HL = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x = 3 + 4(2\cos^2 x - 1) + 2\cos^2 2x - 1$

$= 3 + 8\cos^2 x - 4 + 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 =$

$= -2 + 8\cos^2 x + 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) =$

$= -2 + 8\cos^2 x + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 = 8\cos^4 x = VL$

V.S.V.

---

7. a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad D_f: x \neq 2 \quad V_f: y \neq 1$

$y = \dfrac{x+1}{x-2}$

$(x-2)y = x+1$

$xy - x = 1 + 2y$

$x(y-1) = 1 + 2y$

$x = \dfrac{1+2y}{y-1}$

$y^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x-1}$ $\quad D_{f^{-1}}: x \neq 1$

$V_{f^{-1}}: y \neq 2$

SVAR: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad D_f: x \neq 2 \quad V_f: y \neq 1$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ $\quad D_{f^{-1}}: x \neq 1 \quad V_{f^{-1}}: y \neq 2$

b) $f(x) = \tan 2x$ $\quad D_f: -\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{\pi}{2}$

$-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

$V_f: -\infty < y < \infty$

$y = \tan 2x$

$2x = \arctan y$

$x = \dfrac{1}{2}\arctan y$ $\quad D_{f^{-1}}: -\infty < x < \infty$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x$ $\quad V_{f^{-1}}: -\dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{\pi}{4}$

SVAR: $f(x) = \tan 2x$ $\quad D_f: -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

$V_f: -\infty < y < \infty$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x$ $\quad D_{f^{-1}}: -\infty < x < \infty$

$V_{f^{-1}}: -\dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{\pi}{4}$

8. $1+4+7+\dots+3n-2=\frac{n}{2}(3n-1)\ ,\ n\geq 1$

1) $1+4+7+\dots+3n-2$ ÄR ARITMETISK TALFÖLJD MED $d=3$ ANTAL TERMER $=n$ $t_1=1$ $t_n=3n-2$

$$S_n=\frac{n}{2}(t_1+t_n)=\frac{n}{2}(1+3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$$

2) MED INDUKTION!

$P(n)$: $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)\ ,\ n\geq 1$

$P(1)$: $VL=3\cdot 1-2=1$ $\quad HL=\frac{1}{2}(3\cdot 1-1)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$VL=HL$

ANTAG $P(n)$ SANN, VISA $P(n+1)$

$P(n+1)$: $1+4+7+\dots 3n-2+3(n+1)-2=\left|\begin{matrix}\text{ENLIGT}\\ \text{ANTAGANDET}\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{n}{2}(3n-1)+3(n+1)-2=\frac{n}{2}(3n-1)+3n+1=$$

$$=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=\frac{3n^2+5n+2}{2}=\frac{3(n^2+\frac{5}{3}n+\frac{2}{3})}{2}=*$$

FAKTORISERA $n^2+\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}$.

$n^2+\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}=0$ $\quad n=-\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}$ $\quad \therefore\ n^2+\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}=$

$n=-\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}-\frac{24}{36}}$ $\quad n=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$ $\quad =(n+\frac{2}{3})(n+1)$ $\quad =*$

$n=-1$

$$*\ \frac{3(n+\frac{2}{3})(n+1)}{2}=\frac{(3n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)}{2}(3(n+1)-1)$$

$\therefore$ $P(n+1)$ SANN

$\therefore$ $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ $\Rightarrow$ $P(n)$ SANN FÖR ALLA $n\geq 1$ ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN.

---

9. VISA $\cosh^4 x-\sinh^4 x=\cosh 2x$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ ,\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ,\quad \cosh 2x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

$$\cosh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

$$\sinh^2 x=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\ ,\quad \cosh^2 x+\sinh^2 x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4}=1$$

$$VL=\cosh^4 x-\sinh^4 x=(\cosh^2 x+\sinh^2 x)(\cosh^2 x-\sinh^2 x)=$$

$$=\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)\cdot 1=\cosh 2x=HL\quad VSV$$

ALT LÖSNING $\Rightarrow$

9, ALT LÖSNING

$$\cosh^4 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^4 = \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2)^2}{16} = \frac{(e^{2x} + e^{-2x})^2 + 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 4}{16}$$

$$\sinh^4 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} - 2)^2}{16} =$$

$$= \frac{(e^{2x} + e^{-2x})^2 - 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 4}{16}$$

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x =$$

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 4 - \left((e^{2x} + e^{-2x})^2 - 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 4\right)}{16} =$$

$$= \frac{8(e^{2x} + e^{-2x})}{16} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x \quad \text{V.S.V.}$$