

Tentamensskrivning, 2005-08-27, kl 14.00-19.00
5B1123, Matematik II för CL.

Godkänt på modul nr n ger godkänt på uppgift nr n på tentamen.
Tentamen består av 10 uppgifter. Varje uppgift kan maximalt ge 4 poäng.
För godkänt på uppgift 1-5 krävs minst 3 poäng per uppgift.

Betygsgränser:

- 3 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 – 5 och 5 poäng på uppgifterna 6 - 10
- 4 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 10 poäng på uppgifterna 6 - 10
- 5 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 15 poäng på uppgifterna 6 - 10.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

LYCKA TILL!

1. a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 2x - 5y + z = 4 \\ 3x + 7y - z = 1 \end{cases}$$
 på två sätt:

i) Med Gausselemination

(2 p)

- ii) Visa att $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ är invers till $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ och använd detta för att lösa systemet.

(1 p)

- b) Beräkna $\det(AB)$ då $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(1 p)

- 2.a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3 p)

b) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (7,4,11)$ och $\vec{v}_3 = (5,3,13)$ bildar en bas i R^3 (1 p)

3a) Avgör om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{3^n}$ är konvergent eller divergent. (2 p)

b) Funktionen v definieras av $v(x,y,z) = \ln r$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Visa att $v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = \frac{1}{r^2}$ (2 p)

4. a) Temperaturen T i rummet ges av sambandet $T(x,y,z) = e^{-(x^2 - xy + y^2 + 2z^2)}$. I vilken av riktningarna $(1,2,2)$ och $(2,2,1)$ ökar temperaturen snabbast i punkten $(1,0,1)$? (2 p)

b) Taylorutveckla $f(x,y) = xe^{\cos y}$ omkring $(1,1)$ t.o.m. termer av andra graden. (2 p)

5a) Beräkna $\iint_D x^2 y dx dy$ där D är ytan $1 - x^2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$, $x \geq 0$. (2 p)

b) Bestäm linjeintegralen $\int_C (x^2 + y^2) dx + xy dy$ där C är randen till halvcirkelytan definierad av $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ tagen i positiv led. (2 p)

6. Bestäm C så att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x - 3y + Cz = 0 \end{cases}$ får oändligt många lösningar samt bestäm den räta linje på vilken dessa lösningar ligger.

7. Bestäm största och minsta värde för $U(x,y) = 1 - x^2 + 2x - y^2$ i den slutna triangeln som har hörn i $(0,1)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

8. För vilka värden konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{5^n}$?

9. Beräkna $\iint_D \frac{y dx dy}{x^2 + y^2 + x}$ där D definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

10. Definiera $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Bestäm $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ då $(x,y) \neq (0,0)$. (1 p)

b) Bestäm $f_x(0,0)$ och $f_y(0,0)$. (3 p)