Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2006-01-17, kl 14.00-19.00
5B1123, Matematik II för CL.

Godkänt på modul nr n ger godkänt på uppgift nr n på tentamen.
Tentamen består av 10 uppgifter. Varje uppgift kan maximalt ge 4 poäng.
För godkänt på uppgift 1-5 krävs minst 3 poäng per uppgift.

Betygsgränser:
3 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 – 5 och 5 poäng på uppgifterna 6 - 10
4 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 10 poäng på uppgifterna 6 - 10
5 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 15 poäng på uppgifterna 6 - 10.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

LYCKA TILL!

1. a) Bestäm a så att ekvationssystemet nedan saknar entydig lösning

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + az = b \end{cases} \quad .$$ (2 p)

b) Sätt in det erhållna värdet på a i systemet i 1 a) och bestäm det värdet på b som ger systemet oändligt många lösningar. Ange även dessa lösningar. (2 p)

2. a) För vilka värden på konstanten a bildar vektorerna $(1,2,1,0),(a,a,1,0),(2,1,2,1)$ och $(1,1,1,0)$ en bas i R^4 ? (2 p)

b) Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer för matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2 p)

3. a) Avgör om serien $\sum_{n=0} \frac{2^n + 5}{3^n}$ konvergerar eller divergerar. (2 p)

b) Vi förutsätter att funktionen $f(u.v)$ har kontinuerliga partiella derivator. Sätt $z = f(u,v)$ där $u = 3x + 4y$, $v = xy$. Bestäm $xz'_x + yz'_y$. Svaret får innehålla f, u och v men inte x och y . (2 p)

4. a) Bestäm normalens ekvation till ytan $\ln(\frac{x}{y - z}) = 0$ i punkten $(1,4,3)$. (2 p)

b) Bestäm de stationära punkterna till $z(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ samt avgör deras karaktär. (2 p)

5. a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x + y - 2)dxdy$ där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 3x$ och $x + y = 4$. (2 p)

b) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma xy^2dx + ydy$ längs kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ från punkten (1,0) till punkten (0,1). (2 p)

6. . Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten (1,-1,1) och linjen $x = 2y - 1 = 3z - 2$. (4 p)

7. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\bar{a}(t) = (1, \frac{1}{\sqrt{t}})$. Partikelns hastighet vid tiden t=1 är $\bar{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \le t \le 3$? (4 p)

8. Funktionen $z(x,y)$ definieras implicit av ekvationen $z + xe^z = x^2 + y^2$ så att $z(1,0) = 0$. Bestäm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i punkten $(1,0)$. (4 p)

9. Beräkna integralen $\iint_R \frac{\sqrt{x + y}}{x} dxdy$ där R är triangeln med hörn i (0,0) , (4,0) och (4,4) .

Ledning: Använd t ex substitutionen : $\begin{cases} x = u \\ y = u \cdot v \end{cases}$ (4 p)

10. Visa att om matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är symmetrisk, så är A:s egenvärden reella. (4 p)