Institutionen för matematik
KTH

<u>Tentamensskrivning, 2006-05-19, kl 8.00-13.00</u>
<u>5B1123. Matematik II för CL. Tentamen 1.</u>

Godkänt på modul nr *n* ger godkänt på uppgift nr *n* på tentamen.
Tentamen består av 10 uppgifter. Varje uppgift kan maximalt ge 4 poäng.
För godkänt på uppgift 1-5 krävs minst 3 poäng per uppgift.

Betygsgränser:
3 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 – 5 och 5 poäng på uppgifterna 6 - 10
4 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 10 poäng på uppgifterna 6 - 10
5 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 15 poäng på uppgifterna 6 - 10.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

LYCKA TILL!

1. a) Bestäm vinkeln mellan linjerna l_1 och l_2 . Linjen l_1 går genom punkterna A=(3,1,4) och B=(2,1,3) . Linjen l_2 går genom punkterna C=(1,-1,2) och D=(0,5,3). (2p)

   b) Bestäm ekvationen för planet genom punkten (1,2,-3) som är vinkelrätt mot planen $x - y + z - 1 = 0$ och $2x + y + z + 1 = 0$. (2p)

2. a) Bestäm x så att de tre vektorerna (2,x,1), (1,0,1) och (0,1,3) blir linjärt oberoende i R^3 . (2p)

   b) Matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}$ har egenvektorerna $\overline{v_1} = (1,0,2)$, $\overline{v_2} = (0,2,-5)$ och $\overline{v_3} = (0,1,-3)$. Till varje egenvektor hör ett egenvärde. Bestäm dessa. Är matrisen A diagonaliserbar? (2p)

3. a) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$ är konvergent eller divergent. (2p)

   b) Visa att $u(x,y) = h(x^2y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen $x^2u_{xx} - xu_x - 4y^2u_{yy} = 0$. (2p)

4. a) Transformera uttrycket $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ genom att införa till polära koordinater, dvs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Svaret skall inte innehålla x och y. (2p)

Ledning: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$.

b) Funktionen $f(x, y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y}$ har en lokal extrempunkt. Bestäm punktens koordinater samt avgör dess karaktär. (2p)

5. a) Beräkna $\displaystyle\iint_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy$ där $D = \left\{(x, y) : y^2 \le x \le \pi y, \dfrac{\pi}{2} \le y \le \pi\right\}$. (2p)

b) Beräkna $\displaystyle\oint_C y^2dx + x^2dy$ där C är randen till triangeln med hörn i (1,0), (1,1) och (0,0) tagen i positiv riktning. (2p)

---

6. Beräkna volymen som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planen $z = x + 2y + 3$ och $z = 0$.

7. En triangel har två av sina hörn i A=(1,2,3) och B=(3,6,7). Dess area är 3 areaenheter. Det tredje hörnet ligger på linjen $\bar{r}(t) = (2, 3 - t, 3 + t)$. Bestäm koordinaterna för hörnet C.

8. Beräkna värdet av kurvintegralen $\displaystyle\int_C \left(\frac{y}{\cos^2(xy)} + \sin x\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2(xy)} - \sin y\right)dy$ där

C är kurvan $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

9. a) Beräkna det största och minsta avståndet mellan origo och kurvan given av $3x^2 - 8xy + 9y^2 = 1$.
b) Beräkna arean som kurvan i a) innesluter.
Ledning: Börja med att avgöra vilken typ andragradskurvan är.

10. Visa att höjderna i en godtycklig triangel skär varandra i en punkt.
Ledning: Låt hörnen ha beteckningarna A, B, C. Höjderna från A och B skär varandra i punkten O. Bevisa att $\overrightarrow{OC}$ är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$.