Institutionen för matematik
KTH

<u>Tentamensskrivning, 2006-08-21, kl 8.00-13.00</u>
<u>5B1123. Matematik II för CL. Tentamen 1.</u>

Godkänt på modul nr *n* ger godkänt på uppgift nr *n* på tentamen.
Tentamen består av 10 uppgifter. Varje uppgift kan maximalt ge 4 poäng.
För godkänt på uppgift 1-5 krävs minst 3 poäng per uppgift.

Betygsgränser:
3 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 – 5 och 5 poäng på uppgifterna 6 - 10
4 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 10 poäng på uppgifterna 6 - 10
5 godkänt på 4 st utav uppgifterna 1 - 5 och 15 poäng på uppgifterna 6 - 10.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

LYCKA TILL!

1. a) Bestäm konstanten a så att vektorerna $\bar{u} = (1,2,a)$, $\bar{v} = (0,1,2)$ och $\bar{w} = (1,4,1)$ spänner upp en parallellepiped med volym 1.

   b) Punkten p projiceras på planet //. Vilka koordinater har projektionspunkten q om p = (2,3,1) och // har ekvationen x + y – z = 7 ? (q ligger på planet //).

2. a) Matrisen $A = k\begin{bmatrix} 8 & 1 & a \\ 1 & 8 & b \\ 4 & -4 & c \end{bmatrix}$. Bestäm konstanterna a, b, c, och k så att A blir en ON-matris . Konstanterna c och k är positiva tal.

   b) Visa att determinanten $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$.

3. a) Avgör om serien $\sum_{n=0} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ är divergent eller konvergent.

   b) u är en två gånger deriverbar funktion av en variabel. Visa att funktionen $z(x,y) = u(\frac{x}{y})$ uppfyller den partiella differentialekvationen $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. a) Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z)=x^3+yz^2+y^2$ i punkten (1,1,2) i den riktning som ges av gradienten till rymdytan $z=\sqrt{4xy}$ i denna punkt.

b) MacLaurinutveckla $f(x,y)=e^{x+y}\sin xy$ t.o.m. 3:e gradstermerna.

5. a) Beräkna $\int_0^{\ln 10}\left(\int_{e^x}^{10}\frac{1}{\ln y}dy\right)dx$.

b) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma (2xy+y^2)dx+(x^3+y)dy$ där γ är parabelbågen $y=x^2$ från (-1,1) till (1,1).

---

6. Bestäm den punkt på ytan $z=\arctan\frac{x}{y}$ där tangentplanet har samma normalriktning som planet 2x+y-5z=0.

7. Bestäm $\iint_D \frac{x^2}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy$ där D ges av $1\leq x^2+y^2\leq 4$ samt $x\leq y$.

8. Bestäm största och minsta värde för $f(x,y)=x^2+y^2-x+1$ i området $x^2+4y^2\leq 4,\, x\geq 0$.

9. Bestäm den ON-matris P till matrisen A så att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris då

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

10. Betrakta figuren till höger.

a) Visa att $\begin{cases} c\cos\alpha + a\cos\gamma = b\\ b\cos\alpha + a\cos\beta = c\\ c\cos\beta + b\cos\gamma = a\end{cases}$ (2p)

b) Lös ekvationssystemet m.a.p. $\cos\alpha$ med hjälp av Cramers regel. (2p)
Svaret kan skrivas om till ett känt samband. Vilket?

OBS! 10b) får lösas även om inte 10a) är gjord.