KTH Matematik
Gunnel Roman

Tentamen i Matematik II, för CL, SF1613.

Dag och tid: Onsdag den 20 maj 2009 kl 14.00 – 19.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 5 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 6 - 8 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 9 - 11 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, s.k. VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 39 poäng varav minst 8 VG-poäng
B - 35 poäng varav minst 5 VG-poäng
C - 30 poäng varav minst 2 VG-poäng
D - 26 poäng, E - 25 poäng och Fx - 23 poäng.

Lycka till!!

-------------------------Uppgifter som svarar mot varsin KS-------------------------

1. Bestäm samtliga matriser A så att $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sök en ON-matris P så att $P^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} P$ blir en diagonalmatris.

3. Avgör om serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ är divergent eller konvergent.

4. I vilken riktning är derivatan av $f(x,y) = xy + y^2$ i punkten (3,2) lika med noll?

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y\,dxdy}{1+x}$ där D är ytan som definieras av olikheten $1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

------------------------------------G-uppgifter--

6. I ett koordinatsystem införs de nya ortonormerade basvektorerna $\bar{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$. Uttryck vektorn $\bar{v} = (1,2,3)$ i det nya systemet. Verifiera att vektorns längd inte förändras.

7. För vilka x konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$?

8. Bestäm linjeintegralen $\int_C \frac{xdx+(y-1)dy}{x^2+y^2-2y+1}$ där C är kurvan $y=\sin x$ från $(0,0)$ till $(2\pi,0)$.

-------------------------------------VG-uppgifter---------------------------------------

9. Bestäm konstanten a så att ekvationen $x^2-(2+a)xy+2ay^2=1$ beskriver två parallella linjer och beräkna avståndet mellan linjerna.

10. Genom ekvationen $x-xyz+y^2z^3=1$ definieras implicit en funktion z(x,y) i en omgivning av (2,1) sådan att z(2,1)=1. Visa att detta är en stationär punkt och avgör dess karaktär.

11. Bestäm R så att $\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$ får hälften så stort värde som den generaliserade integralen $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$. D_R definieras av $x^2+y^2 \le R^2$ och D är hela xy-planet .

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ANTAG } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1) & a^2+bc = 1 \\ (2) & ac+dc = 0 \\ (3) & ab+bd = -4 \\ (4) & cb+d^2 = 1 \end{cases}$$

(2) $c(a+d) = 0$ GER $c = 0$, $a+d = 0$

$c = 0 \Rightarrow a = \pm 1 = d$ UR (1) OCH (4)

(3) $b(a+d) = -4 \Rightarrow a+d \neq 0$ OCH $c = 0$

$a = 1 = d \Rightarrow a+d = 2 \Rightarrow b = -2$

$a = d = -1 \Rightarrow b = 2$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ELLER $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i SVAR

---

2. $P^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} P = P^T A P$ A ÄR SYMMETRISK.

SÖK A's EGENVÄRDEN: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff 1-\lambda = \pm 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

A's EGENVEKTORER!

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $x+y=0$, $x=-y$ $\quad \bar{v}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 3$ $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $-x+y=0$, $x=y$ $\quad \bar{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\bar{v}_1| = \sqrt{2} = |\bar{v}_2|$. $\quad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = SVAR

(KOLL

$$P^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$)

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ $\quad a_n = \frac{e^n}{1+e^{2n}} > 0$ $\quad a_n$ ÄR AVTAGANDE.

CAUCHYS INTEGRALKRIT. GER:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \end{array} \right| = \int_1^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{B\to\infty} \int_1^{B} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left[\arctan t\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(\arctan B - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ KONV.

<u>SVAR</u>: KONVERGENT

---

4. $f(x,y) = xy + y^2$ $\quad P = (3,2)$ $\quad \bar{v} = (a,b)$

$|\bar{v}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$$\frac{df}{d\bar{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y\,,\ x+2y)$$

$$\operatorname{grad} f(P) = (2,7)$$

$$\frac{df}{d\bar{v}} = (2,7)\cdot(a,b) = 0 \iff 2a + 7b = 0$$

$$a = -\frac{7}{2}b$$

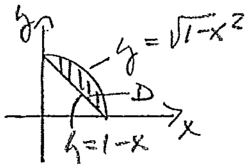
$$\bar{v} = \left(-\frac{7}{2}b,\ b\right) \quad |\bar{v}| = \sqrt{\frac{49}{4}b^2 + b^2} = 1 \iff \frac{53}{4}b^2 = 1$$

$$b = \pm\frac{2}{\sqrt{53}} \Rightarrow a = \mp\frac{7}{\sqrt{53}} \quad \therefore \bar{v} = \pm\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{2}{\sqrt{53}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}(-7,2)$$

<u>SVAR</u>: $\pm\frac{1}{\sqrt{53}}(-7,2)$

---

5. $$\iint_D \frac{y}{1+x}\,dx\,dy = I$$



$$I = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{1+x}\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{1+x}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2-(1-x)^2}{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-x^2+x}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx = -\int_0^1 \left(x-2+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1|\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 2 + 2\ln 2\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

<u>SVAR</u>: $\frac{3}{2} - 2\ln 2$

6. $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ $\bar{e}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\bar{v} = (1,2,3)$ $|\bar{v}| = \sqrt{1+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$(1,2,3) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$ $\bar{v}_e = (a,b,c)$

$(1,2,3) = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + b(0,1,0) + c\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 1 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} \\ 2 = b \\ 3 = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

II: $b = 2$

$\mathrm{I}+\mathrm{III}$: $4 = \frac{2a}{\sqrt{2}} \iff a = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{I}-\mathrm{III}$: $-2 = -\frac{2c}{\sqrt{2}} \iff c = \sqrt{2}$

$\therefore$ $\bar{v}_e = (2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ $|\bar{v}_e| = \sqrt{4\cdot 2 + 4 + 2} = \sqrt{14}$

SVAR: $\bar{v}_e = (2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ $|\bar{v}| = |\bar{v}_e| = \sqrt{14}$

---

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}} = \sum a_n x^n$ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$

SÖK KONVERGENSRADIEN R.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+3}}{\sqrt{n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+2n+4}{n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}} = \sqrt{1} = 1$$

$\therefore$ SERIEN KONVERGERAS FÖR $|x| < 1$.
UNDERSÖK $x=1$ OCH $x=-1$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ JÄMFÖR MED $\sum \frac{1}{n} = \sum b_n$ SOM ÄR DIV.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|n|\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = 1$$

$\therefore$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ ÄR DIV, DÅ $\sum \frac{1}{n}$ ÄR DIV, TY $\sum \frac{1}{n^a}$ DIV DÅ $a \le 1$ ENL. JÄMFÖRELSEKRIT.

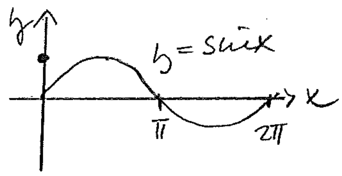
$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

1) ALT.
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \to 0$
3) AVT. TY $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$
$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+3)^{3/2}} < 0$

KONV. ENL LEIBNIZ.

SVAR: SERIEN KONV. DÅ $-1 \le x < 1$

8. $$\int_C \frac{x\,dx + (y-1)\,dy}{x^2+y^2-2y+1} = \int_C \frac{x\,dx + (y-1)\,dy}{x^2+(y-1)^2}$$



$$P = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x\cdot 2(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

$$Q = \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

LIKA

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ DET ÄR TILLÅTET ATT BYTA VÄG.

SING. PUNKT I $(0,1)$ VÄLJ NY VÄG C_1: $x = t \quad dx = dt$
$y = 0 \quad dy = 0$
$0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C = \int_{C_1} = \int_0^{2\pi} \frac{t}{t^2+1}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+1|\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ln(4\pi^2+1)$$

<u>SVAR:</u> $\frac{1}{2}\ln(4\pi^2+1)$

---

9. (*) $x^2 - (2+a)xy + 2ay^2 = 1$ SÖK EGENVÄRDEN.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(2+a)}{2} \\ -\frac{(2+a)}{2} & 2a \end{pmatrix} \qquad \text{KAR. EKV} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{(2+a)}{2} \\ -\frac{(2+a)}{2} & 2a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2a-\lambda) - \frac{(2+a)^2}{2^2} = 0$$

$$2a - \lambda - 2a\lambda + \lambda^2 - 1 - a - \frac{a^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(1+2a) - \frac{a^2}{4} + a - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1+2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+2a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - a + 1}$$

$$\lambda = \frac{1+2a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a + a^2 + \frac{a^2}{4} - a + 1} = \frac{1+2a}{2} \pm \sqrt{\frac{5(1+a^2)}{4}}$$

$$\lambda = \frac{1+2a \pm \sqrt{5}\sqrt{1+a^2}}{2}.$$ DÅ ETT λ-VÄRDE $= 0$

ÄR * TVÅ PARALLELLA LINJER.

FORTS.

9. FORTS.

$1+2a \pm \sqrt{5}\sqrt{1+a^2} = 0 \iff 1+2a = \pm\sqrt{5}\sqrt{1+a^2}$

$(1+2a)^2 = 5(1+a^2)$

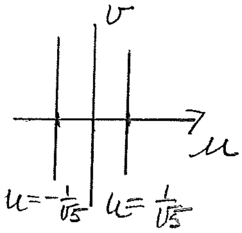
$1+4a+4a^2 = 5+5a^2$

$a^2-4a+4=0 \iff (a-2)^2=0 \quad \therefore \quad a=2$

$a=2 \implies \lambda = \dfrac{1+2\cdot 2 \pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5\pm 5}{2} = \begin{cases}5\\0\end{cases}$

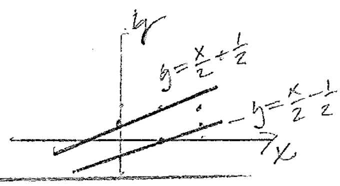
$\ast$ ÖVERGÅR I $5u^2 = 1 \iff u = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

AVSTÅND MELLAN LINJERNA ÄR $\frac{2}{\sqrt{5}}$.



SVAR: $a=2$ OCH AVSTÅNDET ÄR $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(ALT. SÄTT: KVADRAT-KOMPLETTERA $(\ast)$)



---

10. $\cancel{x} - xyz + y^2z^3 = 1 \qquad z(x,y) \qquad z(2,1)=1$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $1 - yz - xy\cdot z'_x + y^2\cdot 3z^2\cdot z'_x = 0$

$z'_x(3y^2z^2 - xy) = yz-1$

$z'_x = \dfrac{yz-1}{3y^2z^2-xy} \qquad z'_x(2,1) = \dfrac{1-1}{3-2} = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $-xz - xyz'_y + 2yz^3 + y^2\cdot 3z^2\cdot z'_y = 0$

$z'_y(3y^2z^2-xy) = xz - 2yz^3$

$z'_y = \dfrac{xz-2yz^3}{3y^2z^2-xy} \qquad z'_y(2,1) = \dfrac{2-2}{3-2} = 0$

$\therefore$ (2,1) ÄR EN STATIONÄR PUNKT.

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$: $-y\cdot z'_x - y\cdot z'_x - xyz''_{xx} + y^2 6z\cdot z'_x\cdot z'_x + 3y^2\cdot z^2\cdot z''_{xx} = 0$

$z'_x = 0$ o $z(2,1)=1$ GER: $-2z''_{xx} + 3z''_{xx} = 0 \implies z''_{xx} = 0 = A$

$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$: $-z - yz'_y - xz'_x - xyz''_{xy} + 2y\cdot 3z^2\cdot z'_x + 6y^2z\cdot z'_y\cdot z'_x + 3y^2z^2\cdot z''_{xy} =$

$z'_x = z'_y = 0$ o $z(2,1)=1$ GER: $-1 - 2z''_{xy} + 3z''_{xy} = 0 \quad z''_{xy} = 1 = B$

FORTS.

10. FORTS

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$: $-xz'_y - xz'_y - xy\,z''_{yy} + 2z^3 + 2y\cdot 3z^2\cdot z'_y + 2y\cdot 3z^2\cdot z'_y +$

$+ y^2\cdot 3\cdot 2z\cdot z'_y\cdot z'_y + 3y^2z^2\cdot z''_{yy} = 0$

$z'_x = z'_y = 0$ OCH $z(2,1)=1$ GER: $-2z''_{yy} + 2 + 3z''_{yy} = 0$

$z''_{yy} = -2 = C$

ANDRA-DERIVATORNA GER: $AC - B^2 = 0\cdot(-2) - 1^2 < 0$

$\therefore$ PUNKTEN ÄR EN SADELPUNKT.

SVAR: $(2,1)$ ÄR EN SADELPUNKT.

11.

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left|\begin{array}{c} \text{pol. koord.} \\ dxdy = r\,dr\,d\theta \\ 0 < r < \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr =$$

$$= \lim_{T\to\infty} 2\pi\int_0^T re^{-r^2}\,dr = \lim_{T\to\infty} 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^T =$$

$$= 2\pi\cdot\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-T^2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left|\begin{array}{c} \text{pol. koord} \\ dxdy = r\,dr\,d\theta \\ 0 \le r < R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \pi\left(-e^{-R^2}+1\right) = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\iint_D = \iint_{D_R} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

$$1 - e^{-R^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-R^2} = \frac{1}{2}$$

$$-R^2 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$R^2 = \ln 2$$

$$R = \pm\sqrt{\ln 2},\quad R > 0 \Rightarrow R = \sqrt{\ln 2}$$

SVAR: $R = \sqrt{\ln 2}$.