Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösning till tentamen i 5B1126 Matematik förberedande kurs för TIMEH1, 2005-12-19, kl. 8–13.

- Tentamensskrivningen består av 4 moment, svarande mot kursens olika delmoment. Varje moment innehåller 3 tal à 4 poäng. Så totalt kan man få 48 poäng.
- För *godkänt* betyg krävs att man klarat samtliga moment. Man blir godkänd på ett visst moment antingen genom att ha klarat motsvarande kontrollskrivning eller genom att ha minst 6 poäng på det momentet i tentan.
- För *högre* betyg krävs godkänt plus följande antal poäng:

  32–40 poäng $\Longrightarrow$ betyget 4,

  41–48 poäng $\Longrightarrow$ betyget 5.

Moment 1

1. I triangeln ABC är sidan $BC = 26$ cm och sidan $AC = 15$ cm. Undersök om triangeln för något eller några värden på vinkeln C kan få arean

   (a) 150 cm^2,

   (b) 196 cm^2.

   Lösning: Areasatsen säger att arean $= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 15 \cdot \sin C = 13 \cdot 15 \sin C$. *I (a)-uppgiften får man*

   $$13 \cdot 15 \cdot \sin C = 150 \iff \sin C = \frac{10}{13} \iff C \approx 50^\circ \text{ eller } C \approx 130^\circ.$$

   I (b)-uppgiften fås istället

   $$13 \cdot 15 \cdot \sin C = 196 \iff \sin C = \frac{196}{195} > 1 : \textit{ går inte!}$$

2. Triangeln ABC är inlagd i ett koordinatsystem så att $A = (24, 7)$, $B = (6, 31)$ och $C = (0, 0)$.

   (a) Beäkna triangelsidornas längder.

   (b) Bestäm vinkeln A.

   Lösning: Sidlängderna fås med Pythagoras sats:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{18^2 + 24^2} = 30, \\ AC &= \sqrt{24^2 + 7^2} = 25, \\ BC &= \sqrt{31^2 + 6^2} = \sqrt{997}. \end{aligned}$$

   Vinkeln A fås med cosinussatsen:

$$\begin{aligned} &BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos A \cdot AB \cdot AC \Longrightarrow \\ &\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{157}{375} \\ &\Longrightarrow A \approx 69,390°. \end{aligned}$$

3. Bestäm det exakta värdet av $\sin 75°$ genom omskrivningen $\sin 75° = \sin(30° + 45°)$.

   Lösning:

$$\begin{aligned} \sin 75° &= \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Moment 2

1. Lös ekvationen $\sin 3x = \sin x$.

   Lösning:

$$\sin 3x = \sin x \iff 3x = \begin{cases} x + n \cdot 2\pi \\ \pi - x + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = n \cdot 2\pi \\ 4x = \pi + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
$$\iff x = n \cdot \pi \text{ och } x = \pi/4 + \pi/2, \text{ där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2. Bestäm det största värdet för $y = 5\sin x + 12\cos x$ genom att först skriva y på formen $y = m \cdot \sin(x+v)$.

   Lösning: Definiera vinkeln v med hjälp av en rätvinklig triangel där motstående kateten är $= 5$, närliggande kateten är $= 12$ och hypotenusan enligt Pythagoras är $= 13$. Då är $\cos v = 5/13$, $\sin v = 12/13$, så att

$$\begin{aligned} y = 5\sin x + 12\cos x &= 13 \cdot \left(\frac{5}{13} \sin x + \frac{12}{13} \cos x \right) \\ &= 13 \cdot (\sin x \cdot \cos v + \cos x \cdot \sin v) = 13 \cdot \sin(x+v). \end{aligned}$$

   Eftersom det största värdet för sinus är $= 1$, så följer det häur att största värdet av y är 13.

3. Lös ekvationen $\sin x \cos x = -0,5$.

   Lösning:

$$\sin x \cdot \cos x = -1/2 \iff 2\sin x \cos x = -1 \iff \sin 2x = -1$$
$$\iff 2x = 3\pi/2 + n \cdot 2\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi, \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Moment 3

1. Bestäm ekvationen för två tangenter med lutningen $0,5$ till kurvan $y = \sin x$. Visa sedan ditt resultat i en figur.

   Lösning: $y' = \cos x = 0,5 \iff x = \pm\pi/3 + n \cdot 2\pi$; låt oss betrakta fallen $x = \pm\pi/3$.

$$(1) \quad x = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \text{tangentlinjen } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \quad x = -\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \text{tangentlinjen } y + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

2. Låt
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$
Bestäm $f'(e)$.

Lösning:
$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Longrightarrow f'(e) = \frac{1-1}{1^2} = 0.$$

3. Två icke-negativa tal har summan N. Bilda summan S av talens kvadrater. Bestäm sedan det största respektive det minsta värdet av S.

Lösning: Låt talen vara x och $N - x$, där $x \geq 0$ och $N - x \geq 0$, det vill säga $o \leq x \leq N$. Summan $S(x)$ av talens kvadrater är då
$$S(x) = x^2 + (N - x)^2 = 2x^2 - 2Nx + N^2.$$
Derivering ger
$$S'(x) = 4x - 2N = 4 \cdot (x - N/2),$$
så $S'(x) < 0$ då $x < N/2$ och $S'(x) > 0$ då $x > N/2$. Härur följer att $S(x)$ är avtande då $x < N/2$ och växande då $x > N/2$, vilket betyder att minsta värdet är $S(N/2) = N^2/2$ och det största är $S(0) = S(N) = N^2$.

Moment 4

1. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2e^{x/2}$ samt linjerna $x = -1$ och $x = 2$.

Lösning:
$$\begin{aligned}\text{Arean } &= \int_{-1}^{2} (2e^{x/2} - x^2)\,dx = \left[4e^{x/2} - x^3/3\right]_{-1}^{2} \\ &= 4e - 8/3 - (4e^{-1/2} + 1/3) = 4e - 3 - \frac{4}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

2. Tillväxthastigheten för en djurpopulation är $(50+5x)$ individer per år, där x är tiden i år räknat från år 2000, då antalet individer var 1050. Hur stor bör populationen vara år 2010 enligt denna modell?

   Lösning:

$$P(2010) = 1050 + \int_0^{10} (50 + 5x)\,dx = 1050 + [50x + 5x^2/2]_0^{10}$$
$$1050 + 500 + 500/2 = 1050 + 500 + 250 = 1800.$$

3. Beräkna derivatan av $x \sin x + \cos x$, och använd resultatet för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x\,dx$$

   exakt. Låt oss sedan beräkna samma integral approximativt med hjälp av trapetsmetoden. Hur stort blir felet om vi använder två respektive fyra delintervall?

   Lösning: $\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x) = x \cos x + \sin x - \sin x = x \cos x \Longrightarrow$

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x\,dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571.$$

   Formeln i trapetsmetoden är

$$\text{integralen över ett visst intervall } \approx \frac{1}{2} \cdot (\text{intervallets längd})$$
$$\cdot\, (\text{summan av integrandens värden i ändpunkterna}).$$

   Med de två delintervallen $[0, \pi/4]$ *och* $[\pi/4, \pi/2]$ *fås*

$$I \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} \approx 0,436,$$

   så felet är $\approx 0,436 - 0,571 = -0,135$.

   Med de fyra delintervallen $[0, \pi/8]$, $[\pi/8, \pi/4]$, $[\pi/4, 3\pi/8]$ *och* $[3\pi/8, \pi/2]$ *fås*

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \\ &\quad \approx 0,538 \Longrightarrow \text{ felet är } \approx -0,033. \end{aligned}$$