Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösning till tentamen i 5B1126 Matematik förberedande kurs för TIMEH1, 2006-01-13, kl. 8–13.

- Tentamensskrivningen består av 4 moment, svarande mot kursens olika delmoment. Varje moment innehåller 3 tal à 4 poäng. Så totalt kan man få 48 poäng.
- För *godkänt* betyg krävs att man klarat samtliga moment. Man blir godkänd på ett visst moment antingen genom att ha klarat motsvarande kontrollskrivning eller genom att ha minst 6 poäng på det momentet i tentan.
- För *högre* betyg krävs godkänt plus följande antal poäng:

  32–40 poäng $\Longrightarrow$ betyget 4,

  41–48 poäng $\Longrightarrow$ betyget 5.

Moment 1

1. Sidorna i en viss triangel har längderna 3 cm, 4 cm respektive 5 cm. Bestäm triangelns vinklar.

   Lösning: Om sidorna i en triangel har längderna a, b respektive c och v är den vinkel som står emot sidan med längden c, så säger cosinussatsen att
   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos v,$$
   eller
   $$\cos v = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$
   Om $a = 3$, $b = 4$ och $c = 5$ så fås
   $$\cos v = \frac{9 + 16 - 25}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \Longrightarrow v = \pi/2.$$

Om $a = 3$, $b = 5$ och $c = 4$ så fås

$$\cos v = \frac{9 + 25 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{18}{30} = 0,6 \Longrightarrow v = \cos^{-1}(0,6).$$

Eftersom vinkelsumman i en triangel är lika med π, så blir den återstående vinkeln $= \pi/2 - \cos^{-1}(0,6)$.

2. I en viss triangel är två av sidorna 4 respektive 7 cm långa. Bestäm hur stor den mellanliggande vinkeln kan vara om det är givet att arean är 7 cm^2.

   Lösning: Om den mellanliggande vinkeln är lika med v, så säger areasatsen att

   $$\text{arean } = 7 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \sin v,$$

   det vill säga

   $$\sin v = \frac{1}{2} \Longrightarrow v = \frac{\pi}{6} \text{ eller } \frac{5\pi}{6}.$$

3. Bestäm det exakta värdet av $\sin 75°$ genom omskrivningen $\sin 75° = \sin(30° + 45°)$.

   Lösning:

   $$\begin{aligned} \sin 75° &= \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Moment 2

1. Lös ekvationen $\sin 3x = \sin x$.

   Lösning:

   $$\sin 3x = \sin x \iff 3x = \begin{cases} x + n \cdot 2\pi \\ \pi - x + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = n \cdot 2\pi \\ 4x = \pi + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
   $$\iff x = n \cdot \pi \text{ och } x = \pi/4 + n \cdot \pi/2, \text{ där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Låt $f(x) = a\sin x + b\cos x$, där a och b är givna positiva tal. Visa att det finns tal m och v så att $f(x)$ kan skrivas på formen $f(x) = m \cdot \sin(x+v)$.

   Lösning: Betrakta den rätvinkliga triangeln med hörn i $(0,0)$, $(a,0)$ *respektive* (a,b) *(och* rita *denna!). Enligt Pythagoras har hypotenusan längden* $\sqrt{a^2+b^2}$. *Om vinkeln vid origo kallas för* v, *så är*

   $$\cos v = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin v = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan v = \frac{b}{a},$$

   så att

   $$a = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos v, \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin v, \quad v = \tan^{-1}(b/a).$$

   Därmed är

   $$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot (\cos v \sin x + \sin v \cos x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+v) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x + \tan^{-1}(b/a)). \end{aligned}$$

3. Sekundvisaren på en klocka är 1,3 cm lång. Hur långt rör sig visarspetsen på 20 sekunder?

   Lösning: Den sträcka som visarspetsen rör sig är en tredjedel av omkretsen till en cirkel med radien $1,3$, *det vill säga*

   $$\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1,3 = \frac{2,6}{3}\pi \approx 2,7.$$

Moment 3

1. Bestäm ekvationen för tangenten i origo till kurvan $y = \sin 3x$.

   Lösning: $y = \sin 3x \Longrightarrow y'(x) = 3\cos 3x \Longrightarrow y'(0) = 3 \Longrightarrow$ *tangenten genom origo ges av* $y = 3x$.

2. Härled derivatan till funktionen $y = \sqrt{x}$ (där $x > 0$) genom att göra omskrivningen $y^2(x) = x$ och derivera båda leden.

   Lösning: d/dx *på* $y^2(x) = x \Longrightarrow 2y \cdot y' = 1 \Longrightarrow$

   $$y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Två icke-negativa tal har summan N. Bilda summan S av talens kvadrater. Bestäm sedan det största respektive det minsta värdet av S.

   Lösning: Låt talen vara x och $N - x$, där $x \geq 0$ och $N - x \geq 0$, så att $0 \leq x \leq N$. Då är summan $S(x)$ av talens kvadrater lika med

   $$S(x) = x^2 + (N - x)^2 = 2x^2 - 2Nx + N^2.$$

   Derivering ger

   $$S'(x) = 4x - 2N = 4 \cdot (x - N/2),$$

   varur följer att

   $$\begin{cases} S'(x) < 0 \text{ då } x < N/2, \\ S'(x) = 0 \text{ då } x = N/2, \text{ och} \\ S'(x) > 0 \text{ då } x > N/2. \end{cases}$$

   Alltså avtar $S(x)$ när $x < N/2$ och växer då $x > N/2$. Detta betyder att största värdet av S är lika med $S(0) = S(N) = N^2$, och det minsta är $S(N/2) = N^2/2$.

Moment 4

1. Bestäm konstanterna A och k så att $y = A \cdot e^{kx}$ är en lösning till problemet

   $$\frac{dy}{dx} = 7y,$$
   $$y(0) = 5.$$

   Lösning: $y = A \cdot e^{kx} \Longrightarrow y' = Ak \cdot e^{kx} = k \cdot y$ och $y(0) = A \cdot e^0 = A$, så att

   $$y' = k \cdot y = 7 \cdot y \Longrightarrow k = 7 \text{ och } 5 = y(0) = A \Longrightarrow A = 5.$$

   Det vill säga $y = 5 \cdot e^{7x}$.

2. Parabeln $y = 4 - x^2$ och den räta linjen $y = 4 - x$ begränsar ett visst ändligt område. Beräkna arean av detta.

   Lösning: Parabeln och linjen skär varandra i de punkter där

   $$y = 4 - x^2 = 4 - x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases}$$

   det vill säga i punkterna $(0,4)$ *och* $(1,3)$. *Den sökta arean ges därför av*

   $$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \{(4 - x^2) - (4 - x)\}\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. Beräkna derivatan av $x \sin x + \cos x$, och använd resultatet för att beräkna integralen

   $$\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

   exakt. Låt oss sedan beräkna samma integral approximativt med hjälp av trapetsmetoden. Hur stort blir felet om vi använder två respektive fyra delintervall?

   Lösning: $\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x \Longrightarrow$

   $$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx = \big[x \sin x + \cos x\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571.$$

   Trapetsmetoden säger att

   > integralen över ett visst intervall$\approx \frac{1}{2}\cdot$ (intervallets längd)
   > $\cdot$ (summan av integrandens värden i ändpunkterna).

   Med de två delintervallen $[0, \pi/4]$ *och* $[\pi/4, \pi/2]$ *fås*

   $$I \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} \approx 0,436,$$

   så felet är $\approx 0,436 - 0,571 = -0,135$.

Med de fyra delintervallen $[0, \pi/8]$, $[\pi/8, \pi/4]$, $[\pi/4, 3\pi/8]$ *och* $[3\pi/8, \pi/2]$ *fås*

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \\ &\approx 0,538, \end{aligned}$$

så i detta fall blir felet $\approx 0,538 - 0,571 = -0,033.$