Institutionen för matematik, KTH
Niklas Eriksen

Tentamen i 5B1127 Matematik H1 – Lösningar
2005-03-30

1. (3p) Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

$$72x + 42y = 12.$$

Lösning: Vi använder Euklides algoritm för att finna största gemensamma delaren av 72 och 42.

$$\begin{aligned} 72 &= 1 \cdot 42 + 30 \\ 42 &= 1 \cdot 30 + 12 \\ 30 &= 2 \cdot 12 + 6 \\ 12 &= 2 \cdot 6 \end{aligned}$$

Den största gemensamma delaren är alltså 6, som dessutom delar högerledet 12. Det finns således lösningar. En lösning får vi om vi uttrycker 6 som en linjärkombination av 72 och 42:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \cdot 30 - 2 \cdot 12 \\ &= 1 \cdot 30 - 2 \cdot (42 - 1 \cdot 30) \\ &= 3 \cdot 30 - 2 \cdot 42 \\ &= 3 \cdot (72 - 42) - 2 \cdot 42 \\ &= 3 \cdot 72 - 5 \cdot 42 \end{aligned}$$

Beräkningen ger

$$12 = 2 \cdot 6 = 2(3 \cdot 72 - 5 \cdot 42) = 6 \cdot 72 - 10 \cdot 42,$$

som ger lösningen $x = 6$ och $y = -10$. För att få samtliga lösningar förkortar vi 72 och 42 med den största gemensamma delaren 6 och får 12 och 7. Ur detta följer att $7 \cdot 72 = 12 \cdot 42$, så samtliga lösningar ges av $x = 6 + 7k$ och $y = -10 - 12k$.

2. (4p) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen $(x.y.z) = (1 + t, 3t, 2t)$ och är parallellt med skärningen av planen $-x + 2y + z = 0$ och $x + z = 1$. (Koordinatsystemet är av ON-typ.)

Lösning: Skärningen mellan de två planen bildar en linje. Både denna linjes riktningsvektor och den givna linjens riktningsvektor är parallella med det sökta planet, det vill säga vinkelräta mot planets normal, så kryssprodukten av dem ger normalen till det sökta planet.

Riktningsvektorn för den givna linjen är $(1, 3, 2)$. Riktningsvektorn till den andra linjen får vi om vi kryssar de båda givna planens normaler:

$$(-1, 2, 1) \times (1, 0, 1) = (2, 2, -2) = 2(1, 1, -1).$$

Kryssprodukten av de beräknade riktningsvektorerna är

$$(2, 2, -2) \times (1, 3, 2) = (5, -3, 2),$$

och eftersom $(1, 0, 0)$ ligger på den givna linjen och därmed i planet får vi planets ekvation

$$5(x - 1) - 3y + 2z = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 2z = 5.$$

3. (3p) Ekvationen $x^5-2x^4+x^3+8x^2-16x+8=0$ har en dubbelrot. Bestäm samtliga rötter.

Lösning: Ekvationens rationella rötter kan bara vara ± 1, ± 2, ± 4 och ± 8. Genom prövning ser vi att $x=1$ är den nämnda dubbelroten, och division ger

$$x^5-2x^4+x^3+8x^2-16x+8=(x^2-2x+1)(x^3+8).$$

Nollställena till $x^3+8=x^3-8(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$ är jämnt fördelade kring origo, med radie $8^{1/3}=2$ och vinklarna $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$. Detta ger nollställena $x=-2$ och $x=1\pm i\sqrt{3}$.

4. (3p) Beräkna 333/25, där talen är skrivna i bas 7 och svaret ska ges i samma bas.

Lösning: Vi ställer upp i liggande stolen:

$$\begin{array}{r|l} 12 & \\ \hline 333 & \underline{25} \\ -25 & \\ \hline 53 & \\ -53 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Det gäller här att komma ihåg att om vi lånar sju till tre så får vi tio, och drar vi sedan bort fem så återstår fem.

En kontroll av svaret fås lätt genom att multiplicera 12 med 25.

Den som omvandlar 333 och 25 till bas 10, utför divisionen, och sedan omvandlar tillbaka får full pott, liksom den som "gissar" att lösningen blir 12 och sedan bekräftar detta med multiplikation.

5. (4p)

   (a) Fibonaccitalen är en avbildningen $F:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definierad som

   $$F(0)=0,\ F(1)=1,\quad F(n)=F(n-1)+F(n-2),\ \text{för } n\geq 2.$$

   Är denna avbildning injektiv? Är den surjektiv?

   (b) Bestäm antalet injektioner från $\{0,1,2\}$ till $\{6,5,4,3,2\}$.

Lösning:

   (a) Eftersom $F(1)=F(2)$ så är inte avbildingen injektiv. Eftersom inget tal avbildas på 4 ($F(4)=5$ och avbildningen är växande) så är inte avbildningen surjektiv.

   (b) Den första mängden har tre element och den senare fem. När vi ska avbilda har vi fem alternativ att avbilda 0 på, blott fyra återstår att avbilda 1 på (eftersom vi inte vill ha någon upprepning) och tre alternativ återstår för 2. Sammanlagt blir det $5\cdot 4\cdot 3=60$.

6. (3p) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases}$$

Observera att antalet lösningar beror av a.

Lösning: Vi har ett inhomogent ekvationssystem med tre obekanta och tre ekvationer. För att få mer information om lösningarna gausseliminerar vi.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right).$$

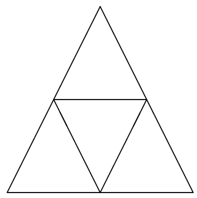
Om $a = -4$ anger sista raden $0 = -8$, så lösningar saknas.

Om $a = 4$ anger sista raden $0 = 0$, vilket alltid stämmer. Vi har då förlorat en ekvation och får oändligt många lösningar. Om vi sätter $z = t$ ger de tidigare raderna $y = 10/7 + 2t$ och $x = 4 - 2y + 3t = 8/7 - t$.

Om $|a| \neq 4$ har vi en unik lösning, nämligen $z = 1/(a+4)$, $y = 10/7 + 2/(a+4)$ och $x = 8/7 - 1/(a+4)$.

7. (3p) Visa att om vi har fem punkter i en liksidig triangel med sidlängd 1 så är avståndet mellan de två närmsta högst 1/2.

   Lösning: Dela in triangeln i fyra mindre trianglar enligt figuren. De fyra mindre trianglarna är alla liksidiga och har sidlängd 1/2, så om två punkter hamnar inom samma triangel så är avståndet högst en halv. Postfacksprincipen ger nu att de fem punkter inte kan fördelas på de fyra trianglarna utan att minst två punkter hamnar inom samma triangel. Därmed är påståendet visat.



8. (3p) Bestäm cosinus av vinklarna i triangeln som går mellan de tre hörnen $(3, 4, 2)$, $(6, 2, 1)$ och $(4, 1, 5)$.

   Lösning: Från hörnet $(3, 4, 2)$ kan de två kanterna beskrivas som vektorerna

$$(6, 2, 1) - (3, 4, 2) = (3, -2, -1)$$

och

$$(4, 1, 5) - (3, 4, 2) = (1, -3, 3).$$

Cosinus av vnkeln mellan dessa kan beräknas med hjälp av skalärprodukten.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \frac{(3, -2, -1) \cdot (1, -3, 3)}{\|(3, -2, -1)\|\|(1, -3, 3)\|} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{266}}.$$

På samma sätt kan de andra vinklarnas cosinus beräknas:

$$\cos(\beta) = \frac{(-3, 2, 1) \cdot (-2, -1, 4)}{\|(-3, 2, 1)\|\|(-2, -1, 4)\|} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{8}{7\sqrt{6}}$$

och

$$\cos(\gamma) = \frac{(-1, 3, -3) \cdot (2, 1, -4)}{\|(-1, 3, -3)\|\|(2, 1, -4)\|} = \frac{13}{\sqrt{19}\sqrt{21}} = \frac{13}{\sqrt{399}}.$$

9. (4p)

   (a) Bestäm determinanten av

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestäm determinanten av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ledning: Utnyttja att

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

(a) Genom att byta plats på raderna omvandlar vi matrisen till en enhetsmatris, som har determinanten 1. Varje radbyte ändrar tecken på determinanten, och i detta fall går det bra med 3 radbyten (eller godtyckligt udda antal större än 3). Determinanten är således -1.

(b) Eftersom matrisen avbildar en annan vektor än nollvektorn på nollvektorn, så kan inte matrisen vara inverterbar. Dess determinant är därför noll.

10. (4p) Talet a är delbart med talet b om det finns något heltal k så att $a = bk$. Visa, till exempel med hjälp av induktion, att $n^3 + 3n^2 + 2n$ är delbart med 6 för alla $n \geq 0$. Du får använda att $n^2 + 3n$ är delbart med 2, vilket lätt inses.

Lösning: Vi använder induktion. Basfallet utgörs av $n = 0$. Då blir summan 0, vilket är delbart med 6, eftersom $0 = 6 \cdot 0$.

Antag nu att påståendet är sant för ett givet n, det vill säga att det finns ett m så att $n^3 + 3n^2 + 2n = 6m$. Vi måste visa att påståendet även är sant för $n + 1$. Vi har

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 \\
&= n^3 + 6n^2 + 11n + 6 \\
&= n^3 + 3n^2 + 2n + 3n^2 + 9n + 6 \\
&= n^3 + 3n^2 + 2n + 3(n^2 + 3n) + 6 \\
&= 6m + 3 \cdot 2j + 6 = 6(m + j + 1).
\end{aligned}$$

Därmed har vi visat att påståendet gäller även för $n + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller därmed påståendet för $n \geq 0$.