Institutionen för matematik, KTH
Niklas Eriksen

Tentamen i 5B1127 Matematik H1
2005-03-30

Skrivtid: 8.00-13.00

Det maximala antalet poäng är angivet inom parentes vid varje uppgift. För godkänt, betyg 3, krävs minst 17 poäng. För betyg 4 och 5 är gränserna 22 respektive 27.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! Inga hjälpmedel är tillåtna.

Uppgifterna är ordnade i nummerordning.

1. (3p) Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

$$72x + 42y = 12.$$

2. (4p) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen $(x.y.z) = (1+t, 3t, 2t)$ och är parallellt med skärningen av planen $-x+2y+z=0$ och $x+z=1$. (Koordinatsystemet är av ON-typ.)

3. (3p) Ekvationen $x^5 - 2x^4 + x^3 + 8x^2 - 16x + 8 = 0$ har en dubbelrot. Bestäm samtliga rötter.

4. (3p) Beräkna 333/25, där talen är skrivna i bas 7 och svaret ska ges i samma bas.

5. (4p)

   (a) Fibonaccitalen är en avbildningen $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definierad som

   $$F(0) = 0,\ F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-1) + F(n-2),\ \text{för } n \geq 2.$$

   Är denna avbildning injektiv? Är den surjektiv?

   (b) Bestäm antalet injektioner från $\{0, 1, 2\}$ till $\{6, 5, 4, 3, 2\}$.

6. (3p) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

Observera att antalet lösningar beror av a.

7. (3p) Visa att om vi har fem punkter i en liksidig triangel med sidlängd 1 så är avståndet mellan de två närmsta högst $1/2$.

8. (3p) Bestäm cosinus av vinklarna i triangeln som går mellan de tre hörnen $(3, 4, 2)$, $(6, 2, 1)$ och $(4, 1, 5)$.

9. (4p)

   (a) Bestäm determinanten av

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestäm determinanten av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Ledning: Utnyttja att

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10. (4p) Talet a är delbart med talet b om det finns något heltal k så att $a = bk$. Visa, till exempel med hjälp av induktion, att $n^3 + 3n^2 + 2n$ är delbart med 6 för alla $n \geq 0$. Du får använda att $n^2 + 3n$ är delbart med 2, vilket lätt inses.