Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag för
5B1127 Matematik H1 för TIMEH1, 05–06–03.

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med bonuspoängen kan man maximalt få 40 poäng. *Betygsgränser:* 16–20 poäng ger betyget 3, 21–26 poäng ger betyget 4 och 27–40 poäng ger betyget 5.
- Lösningsförslag: Gå in på institutionens hemsida www.math.kth.se, klicka först på *Grundkurser* och sedan på 5B1127.

1. *Beräkna största gemensamma divisorn till talen 672 och 408, samt skriv denna divisor som en linjärkombination av 672 och 408.* *(3p)*
Lösning: Vi använder Euklides algoritm på talen 627 och 408:

$$
\begin{aligned}
672 &= 1 \cdot 408 + 264, \\
408 &= 1 \cdot 264 + 144, \\
264 &= 1 \cdot 144 + 120, \\
144 &= 1 \cdot 120 + 24, \\
120 &= 5 \cdot 24 + 0,
\end{aligned}
$$

vilket visar att $\gcd(672, 408) = 24$. Om vi går baklänges i algoritmen så ser vi att

$$
\begin{aligned}
24 &= 144 - 120 = 144 - (264 - 144) = 2 \cdot 144 - 264 = 2 \cdot (408 - 264) - 264 \\
&= 2 \cdot 408 - 3 \cdot 264 = 2 \cdot 408 - 3 \cdot (672 - 408) = 5 \cdot 408 - 3 \cdot 672.
\end{aligned}
$$

2. *Bestäm det antal lösningar som ekvationen $8x = 10$ har i $\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{Z}_{15}$ respektive $\mathbb{Z}_{16}$, samt ange de förekommande lösningarna.* *(3p)*
Lösning: I $\mathbb{Z}_{14}$ ska vi hitta x och y så att $8x + 14y = 10$, eller $4x + 7y = 5$. Här ser man (om nödvändigt med hjälp av Euklides) att

$1 = 4\cdot 2+7\cdot(-1)$; multipliceras detta med 5 fås att $4\cdot 10+7\cdot(-5) = 5$, så att $(x, y) = (10, -5)$ är *en* lösning. För att hitta alla lösningar lägger vi till lösningarna till den homogena ekvationen $4x + 7y = 0 \iff 4x = -7y \iff x = 7k$ och $y = -4k$ för ett godtyckligt heltal k. Så $x = 10+7k$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. $\mathbb{Z}_{14}$ har 14 olika element, nämligen ekvivalensklasserna $[0], [1], \ldots, [13]$. Vi ser att vi får 2 lösningar bland dessa: $10 - 7 \in [3]$ och $10 \in [10]$.

I $\mathbb{Z}_{15}$ ska vi istället lösa $8x + 15y = 10$. Euklides algoritm på 15 och 8 ger

$$
\begin{aligned}
15 &= 1 \cdot 8 + 7,\\
8 &= 1 \cdot 7 + 1,\\
7 &= 7 \cdot 1 + 0,
\end{aligned}
$$

vlket visar att $1 = 8-7 = 8-(15-8) = 8\cdot 2+15\cdot(-1)$. Multiplikation med 10 ger sedan att $8\cdot 20+15\cdot(-10) = 10$, så att $(x, y) = (20, -10)$ är *en* lösning. Den homogena ekvationen $8x + 15y = 0 \iff 8x = -15y$ har lösningen $(15k, -8k)$, Så den allmänna lösningen till vårt problem blir $x = 20 + 15k$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. $k = -1$ ger $x = 5 \in [5]$, och övriga k:n ger alla samma ekvivalensklass. Så ekvationen $8x = 10$ i $\mathbb{Z}_{15}$ har bara en lösning.

I $\mathbb{Z}_{16}$ ska vi lösa $8x+16y = 10 \iff 4x+8y = 5$, eller $4\cdot(x+2y) = 5$. Men 5 kan omöjligen skrivas som $4 \cdot$ (heltal), så vi inser att det inte finns någon lösning alls.

3. *Visa att $4^{2n} - 1$ är delbart med 15 för alla positiva heltal n.* *(3p)*
Lösning: Vi ska alltså visa att påståendena

$$P_n : \quad 4^{2n} - 1 = 15 \cdot (\text{heltal})$$

är sanna för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(1) P_1 säger att $4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ är ett heltal gånger 15, vilket uppenbarligen är sant.

(2) Visa att *om* P_n är sant (det vill säga att $4^{2n} - 1 = 15 \cdot (\text{heltal})$), *så*

är också P_{n+1} sant, det vill säga, $4^{2(n+1)} - 1 = 15 \cdot \text{(heltal)}$:

$$\begin{aligned}4^{2(n+1)} - 1 &= 4^{2n} \cdot 4^2 - 1 = (4^{2n} - 1 + 1) \cdot 16 - 1 \\ &= (4^{2n} - 1) \cdot 16 + 16 - 1 = (4^{2n} - 1) \cdot 16 + 15 = \{\text{enligt } P_n\} \\ &= 15 \cdot \text{heltal} \cdot 16 + 15 = 15 \cdot (\text{heltal} \cdot 16 + 1) \\ &= 15 \cdot \text{(heltal)}.\end{aligned}$$

(3) P_1 sant enligt (1) $\Longrightarrow$ P_2 sant enligt (2) $\Longrightarrow$ P_3 sant enligt (2) $\Longrightarrow$ $\ldots$, så att påståendet P_n är sant för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4. *Låt A vara en mängd bestående av n olika element och låt $\mathbb{R}$ beteckna mängden av alla reella tal.*

   (a) *Visa att om funktionen $f\colon A \to A$ är injektiv, så är den automatiskt också surjektiv.* *(1p)*

   (b) *Visa att om funktionen $f\colon A \to A$ är surjektiv, så är den automatiskt också injektiv.* *(1p)*

   Lösning till (a) och (b): Vi kan betrakta definitionsmängden $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ som n stycken brev, målmängden $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ som n stycken postfack, och funktionen $f\colon A \to A$ som en brevbärare, vilken har till uppgift att placera ut breven i de olika postfacken.

   Att f är *injektiv* betyder att *olika brev placeras i olika postfack*. Men eftersom det finns lika många postfack som brev, så innebär detta att brevbäraren måste lägga *ett* brev i *varje* postfack, vilket i sin tur innebär att varje postfack kommer att innehålla något brev – det vill säga f är *surjektiv*.

   Att f är *surjektiv* innebär att *varje postfack innehåller något brev*. Men eftersom det finns lika många postfack som brev innebär detta att varje postfack bara kan innehålla *ett* brev, det vill säga att olika brev hamnar i olika postfack – så f är *injektiv*.

   (c) *Skissera grafen av en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är injektiv, men inte surjektiv.* *(1p)*

   Lösning: Om en funktion f är växande (det vill säga $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$), så är den uppenbarligen injektiv. Det finns gott om växande funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som *inte är surjektiva* – till exempel $f = e^x$ eller $f = \arctan x$.

(d) *Skissera grafen av en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är surjektiv, men inte injektiv.* *(1p)*

Lösning: En funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är surjektiv men inte injektiv är till exempel ett tredjegradspolynom med ett lokalt maximum som är strikt positivt och ett lokalt minimum som är strikt negativt.

5. *Bestäm skärningen mellan de tre planen $x+y+z=1$, $3x-y+6z=2$ och $6x+2y+9z=5$, samt ge en geometrisk tolkning av denna.* *(3p)*

Lösning: Den sökta skärningen är lika med lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x-y+6z=2, \\ 6x+2y+9z=5, \end{cases}$$

som vi kan skriva som

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Genom att till rad 2 lägga till $(-3)\cdot$ (rad 1) och till rad 3 lägga till $(-6)\cdot$ rad 1, så får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

som är ekvivalent med

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{array}\right).$$

Genom att till rad 1 lägga till $(-1)\cdot$ rad 2, så får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{array}\right),$$

vilket är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+0\cdot y+7/4\cdot z=3/4, \\ 0\cdot x+y-3/4\cdot z=1/4, \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x = 3/4 - 7/4 \cdot z, \\ y = 1/4 + 3/4 \cdot z. \end{cases}$$

Här kan z väljas godtyckligt – säg att $z = 4t$, där $-\infty < t < \infty$. Då fås

$$(x, y, z) = (3/4 - 7t, 1/4 + 3t, 4t) = (3/4, 1/4, 0) + t \cdot (-7, 3, 4),$$

det vill säga en rät linje genom punkten $(3/4, 1/4, 0)$ och med riktningen $(-7, 3, 4)$.

6. *Bestäm något värde på konstanten k som gör att vektorerna*

$$(7, 3k - 2, -2k) \quad \text{och} \quad (2k + 5, 3k, 5k + 3)$$

blir ortogonala. *(3p)*

Lösning: Vektorerna är ortogonala $\iff$ skalärprodukten är lika med 0, det vill säga

$$\begin{aligned} 0 &= (7, 3k - 2, -2k) \cdot (2k + 5, 3k, 5k + 3) \\ &= 7 \cdot (2k + 5) + (3k - 2) \cdot 3k + (-2k) \cdot (5k + 3) \\ &= 14k + 35 + 9k^2 - 6k - 10k^2 - 6k = -(k^2 - 2k - 35), \end{aligned}$$

så vi får andragradsekvationen $k^2 - 2k - 35 = 0$, med lösningarna

$$k = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm 6 = \begin{cases} 7 \\ -5. \end{cases}$$

7. *Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna* $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ *och* $(1, 0, 1)$. *(3p)*

Lösning: Om $\vec{\boldsymbol{u}}$ är vektorn som går från $(1, 1, 0)$ till $(0, 1, 1)$ (det vill säga $\vec{\boldsymbol{u}} = (-1, 0, 1)$) och $\vec{\boldsymbol{v}}$ är vektorn från $(1, 1, 0)$ till $(1, 0, 1)$ (det vill säga $\vec{\boldsymbol{v}} = (0, -1, 1)$), så blir kryssprodukten $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ en normalvektor till planet:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x & \vec{\boldsymbol{e}}_y & \vec{\boldsymbol{e}}_z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Med $(1,1,1)$ som en normalvektor får vi planets ekvation på formen

$$((x,y,z)-(1,1,0))\cdot(1,1,1)=0 \iff x-1+y-1+z=0$$
$$\iff x+y+z=2.$$

8. *Man kan visa att matriserna*

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&7\\1&0&3&1\\2&3&5&6\\0&1&3&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&9&8&7\\0&3&3&1\\0&0&2&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ \textit{och}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}7&9&3&7\\5&8&9&9\\1&4&2&5\\9&8&7&1\end{pmatrix}$$

är inverterbara. Beräkna

$$\det(\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^2)^{-1}). \qquad \textit{(3p)}$$

Lösning: Till att börja med är

$$\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^2)^{-1}=\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-2}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-2},$$

och sedan visar produktsatsen att determinanten för detta uttryck är

$$(\det\boldsymbol{C})^2\cdot\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}\cdot(\det\boldsymbol{C})^{-2}\cdot(\det\boldsymbol{A})^{-1}\cdot(\det\boldsymbol{B})^{-2}=(\det\boldsymbol{B})^{-1}.$$

Eftersom $\boldsymbol{B}$ är en triangulär matris, så är dess determinant lika med produkten av diagonalelementen, det vill säga $\det\boldsymbol{B}=1\cdot3\cdot2\cdot1=6$. Den sökta determinanten är därmed lika med $1/6$.

9. *Lös ekvationen* $z^2-9-40\,i=0$. *(3p)*

Lösning: Ansatsen $z=a+ib$ ger den komplexa ekvationen

$$a^2-b^2+i\cdot 2ab=9+40\,i,$$

som är ekvivalent med det reella ekvationssystemet

$$\begin{cases}a^2-b^2=9, & (1)\\ 2ab=40. & (2)\end{cases}$$

Ekvation (2) visar att $b=20/a$; insättes detta i (1) så fås

$$a^2-\frac{400}{a^2}=9 \iff (a^2)^2-9a^2+400=0 \iff$$
$$a^2=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81+1600}{4}}=\frac{9\pm\sqrt{1681}}{2}.$$

$\sqrt{1681}$ är uppenbarligen något större än 40 − låt oss prova med 41: $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681$. Vi ser därmed att

$$a^2 = \frac{9 \pm 41}{2} = \begin{cases} 25 \\ -16. \end{cases}$$

Men eftersom a är reell, så är $a^2 \geq 0$, vilket ger att $a^2 = 25$ och $a = \pm 5$. Och då blir $b = \pm 20/5 = \pm 4$. Till slut fås att

$$z = a + ib = \pm(5 + 4i).$$

10. *Faktorisera fjärdegradspolynomet $x^4 + 1$ i en produkt av reella polynom med så låg grad som möjligt.* *(4p)*

Lösning: Vi bestämmer först de komplexa rötterna till ekvationen $x^4 + 1 = 0$:

$$x^4 = -1 = e^{i(2n+1)\pi} \iff x = e^{i\frac{2n+1}{4}\pi}, \quad \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \ldots;$$

$$n = 0 \text{ ger roten } x_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$n = 1 \text{ ger roten } x_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$n = 2 \text{ ger roten } x_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

$$n = 3 \text{ ger roten } x_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

och detta är alla rötterna. Om vi observerar att $x_3 = \bar{x}_0$ och att $x_2 = \bar{x}_1$, så kan vi faktorisera $x^4 + 1$ som

$$x^4 + 1 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_0)(x - x_1)(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_0).$$

Genom att multiplicera ihop $(x - x_0)(x - \bar{x}_0)$ respektive $(x - x_1)(x - \bar{x}_1)$

får vi sedan att

$$\begin{aligned} x^4+1 =& \left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &\cdot \left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ =&\{ \text{ enligt konjugatregeln } \} \\ =& \left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right] \\ =&(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$