Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1127 Matematik H1 för TIMEH1, 05–08–26, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med bonuspoängen kan man maxiamlt få 40 poäng.
- *Betygsgränser:* 16–20 poäng ger betyget 3, 21–26 poäng ger betyget 4, och 27–40 poäng ger betyget 5.
- Lösningsförslag: Gå in på institutionens hemsida www.math.kth.se, klicka först på *Grundkurser*, och sedan på 5B1127.

1. *Bestäm alla heltalslösningar till följande ekvationer:*

   (a) $8x + 9y = 3$, (2p)

   (b) $84x + 119y = 134$. (1p)

   Lösning:

   (a) Euklides algoritm tillämpad på talen 9 och 8 ger

$$9 = 1 \cdot 8 + 1,$$
$$8 = 8 \cdot 1 + 0.$$

Detta visar att gcd(8,9)=1, och härur följer att 1 kan skrivas som en linjärkombination av 8 och 9: $1 = -8 + 9$. Alltså fås att

$$3 = (-3) \cdot 8 + 3 \cdot 9,$$

vilket betyder att $(x, y) = (-3, 3)$ är *en* lösning. Den homogena ekvationen $8x + 9y = 0$ har uppenbarligen lösningen $(x, y) = (9k, -8k)$ där $k \in \mathbb{Z}$. Den allmänna lösningen är summan av partikulärlösningen och den homogena lösningen:

$$\begin{cases} x = -3 + 9k, \\ y = 3 - 8k, \end{cases}$$

där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(b) I detta fall ger Euklides algoritm att

$$\begin{aligned}
119 &= 1 \cdot 84 + 35, \\
84 &= 2 \cdot 35 + 14, \\
35 &= 2 \cdot 14 + 7, \\
14 &= 2 \cdot 7 + 0,
\end{aligned}$$

varför gcd(119,84)=7; närmare bestämt är $84 = 7 \cdot 12$ och $119 = 7 \cdot 17$. Men detta visar att $84x + 119y = 134$ kan skrivas som $7 \cdot (12x + 17y) = 134$. Härur följer det att heltalet $12x + 17y$ är lika med $134/7 = 19 + 1/7$, vilket är orimligt. Alltså finns inga heltalslösningar x och y.

2. *Visa att påståendena*

$$P_n\colon \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

är sanna för $n = 1, 2, 3, \ldots$. (3p)

Lösning:

(1) P_1?

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{1+1}, \qquad \text{vilket } \textit{är} \text{ sant.}$$

(2) $P_n \Rightarrow P_{n+1}$? Om vi *antar* att P_n gäller, det vill säga

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

så följer det att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1},
\end{aligned}$$

vilket visar att i så fall gäller P_{n+1} också.

(3) (1) och (2) tillsammans med induktionsprincipen visar till slut att P_n gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. *Beräkna* $(21)^3$ *genom att använda binomialformeln på högerledet i*

$$(21)^3 = (20+1)^3. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}(20+1)^3 &= (20)^3 + 3 \cdot (20)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8000 + 3 \cdot 400 + 60 + 1 = 8000 + 1200 + 60 + 1 = 9261.\end{aligned}$$

4. *Låt* K *vara en kvadrat med sidlängden 10 cm* $-$ *till exempel*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10.\}.$$

Vi vill placera ut fem punkter i K *så att det* minsta *inbördes avståndet mellan dessa blir så stort som möjligt.*

Bestäm hur stort detta minsta avstånd blir, och ange hur punkterna ska placeras för att realisera detta. (3p)

Lösning: Dela in K i fyra lika stora delkvadrater K_1, K_2, K_3 och K_4, där

$$\begin{aligned}K_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 5\}, \\ K_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 5\},\end{aligned}$$

och så vidare.

Enligt postfacksprincipen måste 2 av punkterna hamna i samma delkvadrat. Maximala avståndet mellan dessa två är lika med diagonalens längd $= 5\sqrt{2}$.

Detta inbördes avstånd mellan de fem punkterna realiseras uppenbarligen om man placerar dessa i $(0,0)$, $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$ och $(5,5)$.

5. *Låt* A *vara en mängd som består av* n *element, och låt* B *vara en mängd som består av* m *element. Hur många funktioner* $f \colon A \to B$ *finns det? Förklara!* (3p)

Lösning: f skickar varje element i A till något element i B. Så för varje $a \in A$ finns det m olika värden $f(a)$ att välja mellan. Eftersom A innehåller n element finns det därför $m \cdot m \cdots m$ $\{$ n faktorer$\}$ $= m^n$ olika funktioner $f \colon A \to B$.

6. *Beräkna skärningspunkten mellan linjen* $(x, y, z) = (4, 2, 0) + t(3, 2, -1)$ *och planet* $x + y + 4z = 7$. (3p)

Lösning: På linjen är $x = 4 + 3t$, $y = 2 + 2t$ och $z = -t$; sätter man in dessa värden i planets ekvation så får man

$$\begin{aligned} &4 + 3t + 2 + 2t - 4t = 7 \iff t = 7 - 4 - 2 = 1 \\ &\Rightarrow x = 7,\ y = 4 \text{ och } z = -1. \end{aligned}$$

Det vill säga, skärningspunkten är $(7, 4, -1)$.

7. (a) *Förklara varför det kortaste avståndet* d *mellan linjen* $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}$ *och punkten* $\boldsymbol{r}_1$ *ges av*

$$d = \frac{|(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{v}}|}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}. \qquad (2p)$$

(b) *Använd formeln ovan för att beräkna det kortaste avståndet från linjen* $(x, y, z) = (3 + t, -7 - 2t, t)$ *till origo.* (2p)

(c) *Bestäm samma avstånd genom att uttrycka kvadraten på avståndet mellan origo och en godtycklig punkt på linjen som en funktion av* t*, och sedan söka det minsta värdet av denna funktion.* (2p)

Lösning:

(a) Ytan av den parallellogram som spänns av vektorerna $\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0$ och $\vec{\boldsymbol{v}}$ är dels lika med $|(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{v}}|$, och dels lika med basen gånger höjden, det vill säga $|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot d$. Så

$$d \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| = |(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{v}}|.$$

(b) Här är

$$(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x & \vec{\boldsymbol{e}}_y & \vec{\boldsymbol{e}}_z \\ -3 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (7, 3, -1).$$

Så

$$d = \frac{|(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{v}}|}{|\vec{\boldsymbol{v}}|} = \frac{\sqrt{49 + 9 + 1}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{6}}.$$

(c) Om $f(t)$ betecknar kvadraten på avståndet mellan origo och punkten $(3+t, -7-2t, t)$, så är

$$f(t) = (3+t)^2 + (-7-2t)^2 + t^2 = 6t^2 + 34t + 58.$$

Det är geometriskt uppenbart att denna funktion har ett minimum, men inget maximum. Minimivärdet fås genom att sätta derivatan lika med 0:

$$\begin{aligned} 0 = f'(t) = 12t + 34 \iff t = -\frac{17}{6} \\ \Rightarrow \text{ minvärdet } = 6 \cdot \frac{17^2}{6^2} - 34 \cdot \frac{17}{6} + 58 \\ = \frac{-17^2 + 6 \cdot 58}{6} = \frac{348 - 289}{6} = \frac{59}{6}. \end{aligned}$$

8. *Beräkna determinanten*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Genom att använda elementära radoperationer, utveckling efter rader och så vidare finner man att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1-6) = 5 \cdot 7 = 35. \end{aligned}$$

9. *Skriv det komplexa talet*

$$\frac{1}{(1+i)^3}$$

på formen $a + ib$, där a och b är reella tal. (3p)

Lösning: Eftersom $1 + i = 2^{1/2} \cdot e^{i\pi/4}$ blir

$$(1+i)^{-3} = 2^{-3/2} \cdot e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right).$$

10. *Ekvationen*

$$z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8 = 0$$

har bland annat rötterna $2i$ och $-1+i$. Bestäm samtliga rötter! (2p)

Lösning: Enligt algebrans fundamentalsats har denna fjärdegradsekvation 4 rötter, och eftersom koefficienterna är reella, är dessa komplexkonjugerade. Så $\pm 2i$ och $-1 \pm i$ är de sökta rötterna.