Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

**Tentamen och lösningsförslag för 5B1127 Matematik H1
för TIMEH1, 06–01–11, kl. 8.00–13.00**

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med (de högst 8) bonuspoängen kan man maximalt få 40 poäng.
- *Betygsgränser:* 16-20 poäng ger betyget 3, 21-26 poäng ger betyget 4, och 27-40 poäng ger betyget 5.

1. När Olle var liten kunde man köpa kolor för 4 öre styck och äpplen för 25 öre styck. En gång köpte Olle kolor och äpplen för 1 krona och 35 öre. För att lista ut hur många kolor respektive äpplen som Olle köpte kan man lösa den Diofantiska ekvationen

$$4x + 25y = 135,$$

där x är antalet kolor och y är antalet äpplen.

(a) Bestäm *alla* heltalslösningar till ovanstående ekvation. (2p)
Lösning:

$$1 = 25 - 6 \cdot 4 \Longrightarrow 135 = 135 \cdot 25 - 135 \cdot 6 \cdot 4 = 4 \cdot (-810) + 25 \cdot 135$$
$$\Longrightarrow \text{ partikulärlösningen } (x_p, y_p) = (-810, 135);$$
$$4x + 25y = 0 \iff 4x = -25y \iff \begin{cases} x = 25k, \\ y = -4k \end{cases}, \text{ där } k \in \mathbb{Z},$$
$$\Longrightarrow \text{ homogena lösningen } (x_h, y_h) = (25k, -4k)$$
$$\Longrightarrow \text{ allmänna lösningen } (x, y) = (-810 + 25k, 135 - 4k).$$

(b) Använd sedan resultatet i (a) för att bestämma hur många kolor respektive äpplen som Olle köpte. (1p)
Lösning:

$$x = -810 + 25k \geq 0 \Longrightarrow k \geq 810/25 \Longrightarrow k \geq 33,$$
$$y = 135 - 4k \geq 0 \Longrightarrow k \leq 135/4 \Longrightarrow k \leq 33$$
$$\Longrightarrow k = 33 \Longrightarrow (x, y) = (-810 + 25 \cdot 33, 135 - 4 \cdot 33) = (15, 3).$$

2. Betrakta de fem bokstäverna A, A, A, B och B.

(a) På hur många olika sätt kan man kombinera dessa till ”ord” bestående av 5 bokstäver? (1p)

Lösning: Antalet kombinationer är lika med

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10.$$

(b) Gör en lista över alla dessa kombinationer.
Ledning: Använd till exempel alfabetisk ordning. (2p)

Lösning: I alfabetisk ordning får man följande kombinationer: $AAABB$, $AABAB$, $AABBA$, $ABAAB$, $ABABA$, $ABBAA$, $BAAAB$, $BAABA$, $BABAA$, $BBAAA$ – det vill säga 10 stycken.

3. Låt $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ vara en mängd bestående av m element och $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en mängd bestående av n element.

(a) Hur många olika funktioner $f\colon A \to B$ finns det om $m = 1$? Ange alla dessa! (1p)

Lösning: $f(a_1) = b_1$, $f(a_1) = b_2$, ..., $f(a_1) = b_n$, det vill säga n olika funktioner.

(b) Hur många olika funktioner $f\colon A \to B$ finns det om $m = 2$? Ange alla dessa! (1p)

Lösning:

$$\{f(a_1), f(a_2)\} = \begin{cases} \{b_1, b_1\}, \{b_1, b_2\}, \ldots \{b_1, b_n\}, \\ \quad \vdots \\ \{b_n, b_1\}, \{b_n, b_2\}, \ldots, \{b_n, b_n\}, \end{cases}$$

det vill säga $n \cdot n = n^2$ olika funktioner.

(c) Hur många olika funktioner $f\colon A \to B$ finns det om m är godtyckligt? *Förklara!* (2p)

Lösning: $\{f(a_1), \ldots, f(a_m\} = \{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}\}$ där i_1, ..., i_m oberoende av varandra antar värdena 1, 2, ..., n, vilket ger n^m olika funktioner.

4. Låt n vara ett positivt heltal och låt x, y vara heltal. Som bekant betyder

$$x \equiv y \pmod{n}$$

att

$$x = y + (\text{något heltal}) \cdot n.$$

(a) Visa:

$$x_1 \equiv y_1 \pmod{n} \text{ och } x_2 \equiv y_2 \pmod{n} \qquad (2p)$$
$$\Longrightarrow x_1 y_1 \equiv y_1 y_2 \pmod{n}.$$

Lösning:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y_1 + m_1 \cdot n, x_2 = y_2 + m_2 \cdot n \Longrightarrow \\
&x_1x_2 = (y_1 + m_1n)(y_2 + m_2n) = y_1y_2 + n(y_1m_2 + y_2m_1 + m_1m_2n) \\
&\equiv y_1y_2 \pmod{n}.
\end{aligned}
$$

(b) Använd ovanstående för att enkelt bestämma vilken rest som man får då 68^{45} divideras med 23. (2p)

Lösning: Ur (a) följer det omedelbart att $x_i \equiv y_i \pmod{n}$ för $i = 1, \ldots, m \Longrightarrow x_1x_2 \ldots x_m \equiv y_1y_2 \ldots y_m \pmod{n}$. I vårt fall fås:

$$
\begin{aligned}
&68 = 3 \cdot 23 - 1 \equiv -1 \pmod{23} \Longrightarrow \\
&68^{45} \equiv (-1)^{23} = -1 \pmod{23} \Longrightarrow \\
&68^{45} = -1 + (\text{något heltal}) \cdot 23 \Longrightarrow \\
&68^{45} = 22 + (\text{heltal}) \cdot 23 \Longrightarrow \\
&\text{resten vid division av } 68^{45} \text{ med 23 är} = 22.
\end{aligned}
$$

5. Visa att $2^n > n^2$ för $n = 5, 6, 7, \ldots$. (3p)

   Lösning: Vi ska visa påståendena $P_n\colon 2^n > n^2$ då $n = 5, 6, 7, \ldots$.

   (1) $n = 5 \Longrightarrow 2^5 = 32 > 25 = 5^2 \Longrightarrow P_1$ är sant.

   (2) Antag att P_n är sant för ett visst n (≥ 5), det vill säga $2^n > n^2$. Då är

$$
\begin{aligned}
&2^{n+1} - (n+1)^2 = 2 \cdot 2^n - (n+1)^2 > 2 \cdot n^2 - n^2 - 2n - 1 \\
&= n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq (5-1)^2 - 2 > 0,
\end{aligned}
$$

   så att även P_{n+1} är sant.

   (3) Induktionsprincipen $\Longrightarrow P_5,\ P_6,\ P_7, \ldots$ är sanna.

6. Förklara varför det i en grupp om 13 personer måste finnas minst 2 som är födda samma månad. (2p)

   Lösning: Postfacksprincipen: 13 brev (= personer) ska utplaceras i 12 postfack (= månader) $\Longrightarrow$ något fack (det vill säga någon månad) måste då innehålla minst 2 brev (= personer).

7. Bestäm inversen till matrisen

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}
$$

(3p)

Lösning: Med hjälp av elementära radoperationer får man

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17/6 & 1/6 & -11/6 \\ 0 & 1 & 0 & 4/6 & 2/6 & -4/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right),$$

vilket visar att inversen är lika med

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 & 1 & -11 \\ 4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + 4z &= 3 \\ x - 3y + 5z &= 2 \end{cases} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Med hjälp av inversen ovan fås

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 & 1 & -11 \\ 4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -19 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -19/6 = -3\frac{1}{6}, \\ y = -2/6 = -\frac{1}{3}, \\ z = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

9. (a) Härled en enkel formel för det kortaste avståendet mellan punkten (x_0, y_0, z_0) och planet $ax + by + cz = d$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning: Om (x_1, y_1, z_1) är en godtycklig punkt i planet så fås det sökta avståndet som beloppet av projektionen av vektorn $(x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)$ på planets normalvektor (a, b, c), det vill säga avståndet är lika med

$$\begin{aligned} &\frac{|(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - (ax_1 + bx_1 + cx_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + bx_0 + cx_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

(b) Beräkna det kortaste avståndet mellan punkten $(2,1,1)$ och planet $4x+7y+4z=10$. (1p)

Lösning: Här är $a^2+b^2+c^2=16+49+16=81=9^2$, så avståndet blir lika med

$$\frac{4\cdot 2+7\cdot 1+4\cdot 1-10}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

10. Faktorisera polynomet $P(x)=x^3+1$ i faktorer av så låg grad som möjligt

(a) dels över de komplexa talen, (2p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
&x^3=-1=e^{i(2n+1)\pi} \iff x=e^{i(2n+1)\pi/3}\\
&\implies x=\begin{cases} e^{i\pi/3} \\ e^{i\pi} \\ e^{i5\pi/3}\end{cases} = \begin{cases} 1/2+i\sqrt{3}/2 \\ -1 \\ 1/2-i\sqrt{3}/2\end{cases}\\
&\implies x^3+1=(x+1)(x-1/2-i\sqrt{3}/2)(x-1/2+i\sqrt{3}/2).
\end{aligned}$$

(b) och dels över de reella talen. (2p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
&((x-1/2)-i\sqrt{3}/2)((x-1/2)+i\sqrt{3}/2)=(x-1/2)^2+3/4\\
&=x^2-x+1/4+3/4=x^2-x+1\\
&\implies x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).
\end{aligned}$$