Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tenta och lösningsförslag till 5B1127 Matematik H1
för TIMEH1, 06–05–17, kl. 8.00–13.00

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med (de högst 8) bonuspoängen kan man maximalt få 40 poäng.
- *Betygsgränser:* 16-20 poäng ger betyget 3, 21-26 poäng ger betyget 4, och 27-40 poäng ger betyget 5.
- *Kompletteringstentamen* den 9:e juni för dem som fått 14 eller 15 poäng på tentan. Skicka mail till olles@math.kth.se för mera information.

1. *Lös ekvationen*

$$20x \equiv 8 \pmod{44}$$

och ange alla lösningar (mod 44) explicit. (4p)

Lösning: $20x \equiv 44 \pmod{44} \iff$ finns heltal y så att $20x = 8 + 44y$ $\iff 5x - 11y = 2$. Nu är $\gcd(5, 11) = 1 = 11 - 5 \cdot 2 \iff 5 \cdot (-2) - 11 \cdot (-1) = 1$, så att $5 \cdot (-4) - 11 \cdot (-2) = 2$. Alltså är $x_p = -4$, $y_p = -2$ en partikulärlösning. Den homogena ekvationen $5x - 11y = 0$ har lösningarna $x_h = 11k$, $y_h = 5k$ för $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Alltså är

$$x = x_p + x_h = -4 + 11k$$

den allmänna lösningen. $k = 1, 2, 3, 4$ ger de fyra lösningarna 7, 18, 29 och 40 modulo 44.

2. *Formulera binomialsatsen och förklara sedan hur denna kan användas för att visa att*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

och

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \qquad (3p)$$

Lösning: Binomialformeln säger att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$a = b = 1$ ger att $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, och $a = 1$, $b = -1$ ger att $0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

3. *Förklara hur många olika följder som man kan bilda av samtliga bokstäver i ordet ANTENNEN.* (2p)

   Lösning: ANTENNEN innehåller 8 bokstäver, varav N förekommer 4 gånger, E förekommer 2 gånger och övriga 1 gång var. Antalet följder blir därför

$$\frac{8!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 30 \cdot 28 = 840.$$

4. *Är följande påstående sant eller inte:*

   > *Om 15 personer tillsammans äter 136 kräftor så måste åtminstone någon äta minst 10 stycken.*

   Förklara! (2p)

   Lösning: Använd ”postfacksidén”: om alla äter högst 9 kräftor var, så går det åt högst $15 \cdot 9 = 135$ kräftor, vilket alltså är för lite. Således måste *någon* äta minst 10 stycken.

5. *Visa att påståendena*

$$\mathrm{P}_n : \quad 3^n > 4n^2 + 2^n$$

   gäller för $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$ (4p)

   Lösning: Visa först att P_4 gäller: $3^4 = 9 \cdot 9 = 81$, medan $4 \cdot 4^2 + 2^4 = 4 \cdot 16 + 4 \cdot 4 = 64 + 16 = 80$, så att $3^4 = 81 > 80 = 4 \cdot 4^2 + 2^4$, det vill säga P_4 är sant.

   Visa sedan att *om* P_n är sant, så är också P_{n+1} sant: vänsterledet i P_{n+1} är $= 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > \{$ p.g.a. $P_n\} > 3 \cdot (4n^2 + 2^n)$, medan högerledet är $= 4(n+1)^2 + 2^{n+1}$. Vi måste alltså visa att

$$12n^2 + 3 \cdot 2^n > 4n^2 + 8n + 4 + 2^{n+1} \qquad \text{då } n \geq 4.$$

Här är det klart att $3 \cdot 2^n > 2^{n+1}$, så det återstår att visa att $12n^2 > 4n^2 + 8n + 4$. Men

$$12n^2 > 4n^2 + 8n + 4 \iff 8n^2 - 8n > 4 \iff 8n(n-1) > 4,$$

vilket uppenbarligen är sant då $n \geq 4$. Så $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$.

Till slut: P_4 gäller $\Longrightarrow$ P_5 gäller $\Longrightarrow$ P_6 gäller, och så vidare. Så P_n gäller då $n = 4, 5, 6, \ldots$

6. *Betrakta ekvationssystemet*

$$\begin{cases} x + y - az = 3, \\ x - ay - z = 2, \\ x - 3y - z = 2 - a, \end{cases}$$

där a är en parameter.

(a) *För vilka värden på a finns det en unik lösning, respektive ingen lösning alls, respektive oändligt många lösningar?* (3p)

(b) *Bestäm lösningarna för det eller de värden på a som ger oändligt många lösningar.* (1p)

Lösning: Systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

har en unik lösning om och endast om determinanten av koefficientmatrisen är skild från noll. Så låt oss beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix};$$

adderar man $(-1)\cdot$(rad 1) till rad 2 respektive rad 3 så blir determinanten lika med

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -a-1 & a-1 \\ 0 & -4 & a-1 \end{vmatrix}.$$

Utveckling efter första kolonnen visar sedan att determinanten är lika med

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -a-1 & a-1 \\ -4 & a-1 \end{vmatrix} = (-a-1)(a-1) + 4(a-1) = (a-1)(4-a-1)$$
$$= (a-1)(3-a).$$

Så determinanten är $\neq 0 \iff a \neq 1$ och $a \neq 3$.

Då $a = 1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{array}\right) \iff$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \iff$$
$$\begin{cases} x - z = 5/2, \\ y = 1/2, \end{cases} \iff \begin{cases} x = t + 5/2, \\ y = 1/2, \\ z = t, \end{cases}$$

där t är en godtycklig parameter — det vill säga oändligt många lösningar.

Då $a = 3$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right),$$

där sista raden är ekvivalent med $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3$ — och således finns ingen lösning.

Svar till (a): $a = 1 \implies$ oändligt många lösningar, $a = 3 \implies$ ingen lösning, och för övriga a-värden fås unika lösningar.

Svar till (b): $(x, y, z) = (5/2, 1/2, 0) + t \cdot (1, 0, 1)$.

7. *Låt* $\boldsymbol{A}$ *och* $\boldsymbol{B}$ *vara inverterbara* $n \times n$*-matriser. Visa att då har även* $\boldsymbol{AB}$ *en invers, och uttyck denna med hjälp av* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *och* $\boldsymbol{B}^{-1}$. (2p)

Lösning:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1} \text{ finns } \Longrightarrow \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \text{ finns } \Longrightarrow\\&(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}\\&= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \Longrightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.\end{aligned}$$

8. *Bestäm arean av den triangel i rummet som har sina hörn i punkterna*

$$A = (1,3,2), \quad B = (3,1,4) \quad \text{och} \quad C = (2,3,5). \qquad (3p)$$

Lösning: $\overrightarrow{AB} = (2,-2,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,0,3) \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-4,2)$$

$$\Longrightarrow \text{ arean } = 1/2 \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 1/2 \cdot \sqrt{36+16+4} = 1/2 \cdot \sqrt{56} = \sqrt{14}.$$

9. *Visa att*

$$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta. \qquad (4p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned}&\cos 4\theta + i\,\sin 4\theta = e^{i4\theta} = (e^{i\theta})^4 = (\cos\theta + i\,\sin\theta)^4\\&= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\,\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta\\&\Longrightarrow \sin 4\theta = \text{ imaginärdelen } = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\,\cos\theta\sin^3\theta,\end{aligned}$$

så att

$$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 4\cos^3\theta - 4\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 8\cos^3\theta - 4\,\cos\theta.$$

10. *Skriv polynomet $P(x) = x^4 + 4$ som en produkt av reella polynom av så låg grad som möjligt.* (4p)

Lösning:

$$\begin{aligned}&x^4 = -4 = 4 \cdot e^{i\pi(1+2n)} \Longrightarrow x = 4^{1/4} \cdot e^{i\pi(1/4+n/2)} = \sqrt{2} \cdot e^{i\,\frac{\pi}{4} + i\,\frac{n\pi}{2}}\\&= \pm 1 \pm i \ (\textit{alla} \text{ kombinationer av } + \text{ och } -) \Longrightarrow\\&x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i) \cdot (x+1-i)(x+1+i)\\&= [(x-1)^2+1][(x+1)^2+1] = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2).\end{aligned}$$