Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till 5B1127 Matematik H1 för TIMEH1, 06–08–23, kl. 14.00–19.00

- Inga hjälpmedel.
- Tillsammans med (de högst 8) bonuspoängen kan man maximalt få 40 poäng.
- *Betygsgränser:* 16-20 poäng ger betyget 3, 21-26 poäng ger betyget 4, och 27-40 poäng ger betyget 5.
- *Kompletteringstentamen* ordnas för dem som fått 14 eller 15 poäng på tentan. Skicka mail till olles@math.kth.se för mera information.

1. *Bestäm alla lösningar till ekvationen* $12x = 15$ *i* $\mathbb{Z}_{39}$. (3p)

   Lösning: $12x \equiv 15 \pmod{39} \iff$ finns heltal y så att $12x = 15 + 39y \iff 4x - 13y = 5$. Nu är det klart att $1 = 13 - 3 \cdot 4$, så att $4 \cdot (-3) - 13 \cdot (-1) = 1$ och därmed är $4 \cdot (-15) - 13 \cdot (-5) = 5$. Detta visar att $x_p = -15$, $y_p = -5$ är en partikulärlösning. Den homogena ekvationen $4x - 13y = 0$ har lösningarna $x_h = 13k$, $y_h = 4k$, där k är ett godtyckligt heltal. Så allmänna lösningen till ekvationen $4x - 13y = 5$ ges av $x = 13k - 15$ och $y = 4k - 5$. Genom att sätta in $k = 2, 3, 4$ fås sedan alla lösningarna till $12x = 15$ i $\mathbb{Z}_{39}$:

   $$x = 11,\ 24,\ 37.$$

2. *Bestäm en vektor i* $\mathbb{R}^3$ *som har längden 3 och som är vinkelrät mot vektorerna* $(-3, 1, -1)$ *och* $(2, 0, 1)$. (3p)

   Lösning: Kryssprodukten av $\boldsymbol{u} = (-3, 1, -1)$ och $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Denna ges av

   $$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -2),$$

som har längden $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Så för att få den rätta längden 3 multiplicerar vi med $3/\sqrt{6} = \sqrt{3/2}$, och får därmed lösningen

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1, 1, -2).$$

3. *Bestäm alla (komplexa) lösningar till ekvationen*

$$z^6 + 16z^3 + 64 = 0. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Med $t = z^3$ fås andragradsekvationen $t^2 + 16t + 64 = 0$. Denna är ekvivalent med $(t+8)^2 = 0$, och har därför lösningarna

$$z^3 = t = \begin{cases} -8, \\ -8. \end{cases}$$

Så det återstår att lösa ekvationen $z^3 = -8$:

$$z^3 = -8 = 2^3 \cdot e^{i(1+2n)\pi} \iff z = 2 \cdot e^{i\pi/3 + i2\pi n/3}$$
$$\iff z = \begin{cases} 2 \cdot e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}, \\ 2 \cdot e^{i\pi} = -2, \\ 2 \cdot e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vi får alltså de 3 dubbelrötterna $1 + i\sqrt{3}$, -2 och $1 - i\sqrt{3}$.

4. *Följande uttryck är oktalt (alltså skrivet i talbasen 8). Beräkna summan och uttryck den i talbasen 7.*

$$721 + 71 =? \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: $(721)_8 + (71)_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 7^1 + 1 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 448 + 16 + 1 + 56 + 1 = 522$. För att uttrycka 522 i talbasen 7 dividerar vi upprepade gånger med 7:

$$\begin{aligned} 522 &= 7 \cdot 74 + 4, \\ 74 &= 7 \cdot 10 + 4, \\ 10 &= 7 \cdot 1 + 3, \\ 1 &= 0 \cdot 7 + 1. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}522 &= 7 \cdot (7 \cdot 10 + 4) + 4 = 7^2 \cdot (7 + 3) + 7 \cdot 4 + 4 \\ &= 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = (1344)_7.\end{aligned}$$

5. *Låt $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hur många injektiva funktioner $f \colon A \to B$ finns det som uppfyller att $f(a) + f(b) = 10$? (Svaret får ges som en produkt av heltal.)* (3p)

   Lösning: En funktion $A \to B$ bestäms genom att välja funktionsvärde för vart och ett av elementen i A. Den blir injektiv om alla dessa funktionsvärden är olika. Vi kan välja $f(a)$ på 8 sätt (vi får nämligen inte välja $f(a) = 5$ eftersom det skulle tvinga $f(b)$ att bli 5, vilket är förbjudet då f ska vara injektiv, och vi kan inte välja $f(a) = 10$). Efter valet av $f(a)$ blir $f(b)$ bestämt till $10 - f(a)$. Därefter har vi 8 valmöjligheter för $f(c)$, därefter 7 för $f(d)$, och så vidare, tills vi kommer till $f(h)$ som kan väljas bland de 3 återstående elementen i B. Sammanlagt finns alltså

   $$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

   olika injektiva funktioner.

6. *Bestäm alla lösningar till matrisekvationen*

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3p)}$$

   Lösning: Med hjälp av Gauss-Jordan elimination ser man att

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\iff \begin{cases} x = -1/2 - z, \\ y = 3/4, \\ z = \text{godtycklig}. \end{cases}$$

7. *Hur många olika följder kan man bilda av samtliga bokstäver i ordet TENTAMEN om de båda T:na aldrig får stå bredvid varandra? (Svaret får ges som en produkt av heltal.)* (3p)

Lösning: TENTAMEN består av 8 bokstäver, varav T, E och N förekommer 2 gånger vardera. Totala antalet följder som kan bildas av bokstäverna i TENTAMEN är därför

$$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 7!.$$

Antalet följder som innehåller T:na bredvid varandra får vi genom att betrakta TT som en enda symbol, och betrakta $\{TT\}ENAMEN$ som ett "ord" med 7 bokstäver; vi får då

$$\frac{7!}{2!\cdot 2!} = \frac{7!}{4} \quad \text{stycken.}$$

Så det sökta antalet blir lika med

$$7! - \frac{7!}{4} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot (4-1) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2.$$

8. *Avgör om matrisen* $(\boldsymbol{AB})^4(\boldsymbol{BC})^3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ *är inverterbar, där*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3p)

Lösning: Matrisen saknar invers om och endast om dess determinant är lika med noll. Eftersom

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger utveckling efter 3:e raden att $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 0$. Så enligt produktsatsen för determinanter är

$$\det(\boldsymbol{AB})^4(\boldsymbol{BC})^3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det\big((\boldsymbol{AB})^4(\boldsymbol{BC})^3\big)\cdot\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 0.$$

Alltså är matrisen inte inverterbar.

9. *Låt* $\boldsymbol{u} = (2, -1, 3)$ *och* $\boldsymbol{v} = (4, -1, 2)$ *vara vektorer i* $\mathbb{R}^3$. *Bestäm dels den ortogonala projektionen av* $\boldsymbol{u}$ *på* $\boldsymbol{v}$ *och dels den komponent av* $\boldsymbol{u}$ *som är ortogonal mot* $\boldsymbol{v}$. (3p)

Lösning: Projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$ ges av

$$\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = \frac{8+1+6}{16+1+4}(4, -1, 2) = \frac{5}{7}(4, -1, 2).$$

Komponenten ortogonal mot $\boldsymbol{v}$ är lika med

$$\boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \frac{1}{7}(-6, -2, 11).$$

10. *Visa att påståendena*

$$P_n: \quad \sum_{k=0}^{n} k\left(k + \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)^2}{3}$$

gäller för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (4p)

Lösning: (1) Vi visar först att P_0 gäller:

$$n = 0 \Longrightarrow 0 = 0 - \text{vilket är sant.}$$

(2) Sedan visar vi att $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\text{VL i } P_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} k\left(k + \frac{1}{3}\right) + (n+1)\left(n + 1 + \frac{1}{3}\right) = \{\text{enligt } P_n\} \\
&= \frac{n(n+1)^2}{3} + (n+1)\frac{3n+4}{3} = \frac{n+1}{3} \cdot (n(n+1) + 3n + 4) \\
&= \frac{n+1}{3} \cdot (n^2 + 4n + 4) = \frac{n+1}{3} \cdot (n+2)^2 \\
&= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)^2}{3} = \text{ HL i } P_{n+1}.
\end{aligned}$$

(3) Till slut får vi:

$$(1) \Longrightarrow P_0 \text{ sant } \overset{(2)}{\Longrightarrow} P_1 \text{ sant } \overset{(2)}{\Longrightarrow} P_2 \text{ sant } \overset{(2)}{\Longrightarrow} P_3 \text{ sant } \overset{(2)}{\Longrightarrow} \ldots,$$

det vill säga P_n gäller för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.