KTH Matematik
Examinator: Börje Leander

SVAR TILL
Tentamen i 5B1127 Matematik H1 den 22 maj 2007

1. **Avgör för vilka värden på konstanten a som nedanstående ekvationssystem har lösning och lös systemet för dessa a.**

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+3y+6z=2 \\ 2x+6y+9z=a \end{cases}$$

Lösning: Efter Gausselimination i totalmatrisen fås en matris där den sista raden är $0\,0\,0\,a-5$ varur det framgår att lösning bara kan finnas för $a=5$. Lösningen kan då skrivas $z=t$, $y=3/4-7t/4$, $x=1/4+3t/4$.

2. **Vektorerna $\mathbf{u}=(2,-2,1)$, $\mathbf{v}=(2,1,-2)$ och $\mathbf{w}=(2,2,1)$ är givna i ett ON-system.**
   A. Är u ortogonal mot v? Är v ortogonal mot w?
   B. Bestäm en vektor som är parallell med w och som har längd 1.
   C. Bestäm en vektor som är ortogonal mot både u och v och som har längd 1.

Lösning: A. Vi ser att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ och $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=4\neq 0$ vilket betyder att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala medan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ inte är det.

B. Eftersom $|\mathbf{w}|=3$ så är $(2/3,2/3,1/3)$ en vektor med längd 1 som är parallell med $\mathbf{w}$.

C. Vi får $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(3,6,6)$ som är en vektor med längd 9. Därför är $(1/3,2/3,2/3)$ en vektor med de sökta egenskaperna.

3. **A. Utför polynomdivisionen $\dfrac{x^3-6x^2+3x+10}{x-2}$, bestäm kvot och rest.**
   B. Hitta alla reella nollställen till täljaren i A.
   C. Faktorisera sedan täljaren så långt möjligt i reella faktorer.

Lösning: A Efter vanlig polynomdivision fås kvoten till $x^2 - 4x - 5$ och resten till 0.

B. Enligt faktorsatsen och uppgift A är ett nollställe $x = 2$. De övriga fås ur $x^2 - 4x - 5 = 0$ och är $x = 5$ och $x = -1$.

C. Enligt faktorsatsen och ovanstående gäller att
$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x-2)(x-5)(x+1)$.

4. **Avgör vilket som är störst,** $\sum_{k=3}^{10} 2^k$ **eller** $\sum_{k=6}^{55}(2k-20)$ **eller** $\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}$ **.**

Lösning: Vi beräknar helt enkelt summorna. För att beräkna den första använder vi formeln för en geometrisk summa och får summan till 2040. För att beräkna den andra använder vi formeln för en aritmetisk summa och får den till 2050. Den tredje är enligt binomialsatsen lika med $(1+1)^{11} = 2^{11} = 2048$. Den andra var störst!

5. **Finn alla lösningar till ekvationen** $6x \equiv 8$ **i** $\mathbf{Z}_{11}$ **respektive** $\mathbf{Z}_{12}$**.**

Lösning: Låt oss börja med Z_{12}. Där betyder ekvationen att $6x = 8 + 12y$ för något heltal y, vilket är detsamma som $6x - 12y = 8$. Eftersom största gemensamma delaren till 6 och 12 inte delar 8 saknar denna ekvation heltalslösningar. Därmed är den givna ekvationen inte lösbar i Z_{12}.

I Z_{11} fås istället den diofantiska ekvationen $6x - 11y = 8$ som är lösbar. Löser man den (alternativt kan man helt enkelt skriva upp multiplikationstabellen i Z_{11}) så får man den enda lösningen $x = 5$ till $6x \equiv 8$ i Z_{11}.

6. **Platserna** $P1$, $P_2, \ldots, P_7$ **bildar en ring. På dessa platser skall ställas flaskor med kemikalierna** A_1, $A_2, \ldots, A_7$**. På grund av explosionsrisk får** A_1, A_2 **och** A_3 **ej ha** 3 **platser i följd. På hur många sätt kan placeringen ske?**

Lösning: Det finns 7! olika sätt att placera ut flaskorna. Av dessa sätt ger $7 \cdot 6 \cdot 4!$ placeringar med explosionsrisk. Svaret blir alltså $7! - 7 \cdot 6 \cdot 4! = 4032$.

7. **Lös ekvationen** $z^2 - (6+2i)z + 11 + 10i = 0$**. Rötterna ska ges på formen** $a + bi$**, där** a **och** b **är reella tal, förenklade så långt som möjligt.**

Lösning: Med sedvanlig metod fås att lösningarna är $z = -2 - 3i$ och $z = -4 + i$.

8. **Bevisa, till exempel med induktion, att**

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Lösning: Vi använder induktion. Bassteg: Om $n=1$ så är VL$=1/1\cdot 2=1/2=$ HL. Induktionssteg: Antag att formeln i uppgiften är sann för $n=p$, dvs antag att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{p(p+1)}=\frac{p}{p+1}.$$

Vi ska då visa att formeln också måste vara sann för $n=p+1$. Dvs vi ska visa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{p+1}{p+2}.$$

Enligt vårt antagande så är här VL$=p/(p+1)+1/(p+1)(p+2)=(p+1)^2/(p+1)(p+2)=(p+1)/(p+2)=$HL. Med induktion följer nu påståendet i uppgiften.