

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 050317

Del 1

1. Vi undersöker om A har invers:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 55 & -18 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 49 & -16 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Vi får } X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 6 \\ 43 & -14 & -17 \end{bmatrix}.$$

2. En normalvektor till det sökta planet ges av kryssprodukten mellan de båda linjernas

$$\text{riktningsvektorer: } (1,2,3) \times (1,-1,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,4,-3). \text{ En ekv för planet är då}$$

$$x + 4y - 3z = C. \text{ Insättning av en punkt på planet, tex origo, ger } C = 0.$$

3. $\arcsin t$ är definierad för $-1 \leq t \leq 1$ och $\sqrt{t}$ är definierad för $t \geq 0$. Det sökta definitionsområdet ges då av $0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$. Användning av kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

4. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l'Hospitals regel (samma typ fås

$$\text{i bägge stegen) ger } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{3 \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{9 \cos 3x} = \frac{2}{9}.$$

$$5. \int_1^e \sqrt{\frac{1+\ln x}{x^2}} dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_0^1 \sqrt{1+u} du = \left[(1+u)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1).$$

6. Serien är positiv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ som är en geometrisk serie med kvoten

$r = \frac{1}{3}$. Eftersom $|r| < 1$ är den konvergent. Den givna serien är då konvergent enligt majorantprincipen (Comparison Test).

7. Det homogena problemet har karakteristisk ekv $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3, 3$. Den allmänna lösningen till den homogena ekv är då $y_h(x) = (Ax + B)e^{3x}$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = (ax + b)e^{2x} \Rightarrow y_p'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4(ax + a + b)e^{2x}$.

Insättning i diffekvationen ger :

$$[4(ax + a + b) - 6(2ax + a + 2b) + 9(ax + b)]e^{2x} = xe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Det ger $y_p(x) = (x + 2)e^{2x} \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{3x} + (x + 2)e^{2x}$.

8. $f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{12-x}{2\sqrt{x}} = \frac{12-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 4$. Funktionen är kontinuerlig på ett slutet och

begränsat intervall. Då antar den ett största och ett minsta värde där. Det sker i den kritiska punkten eller i en ändpunkt eftersom singulära punkter saknas på intervallet.

$f(4) = 16$, $f(1) = 11$, $f(9) = 9 \Rightarrow 9 \leq f(x) \leq 16$ dvs värdet 17 antas inte.

Del 2

9. Vi ser att $x = 2$ är ett nollställe till nämnarens polynom. Division med $x - 2$ ger faktorn $x^2 + 3$. Vi partialbråksuppdelar funktionen:

$$\frac{3x^2 - x - 3}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{(A+B)x^2 + (C-2B)x + 3A-2C}{(x-2)(x^2+3)}.$$
 Det ger systemet

$$\begin{cases} A+B = 3 \\ -2B+C = -1 \\ 3A-2C = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}.$$
 Ur detta får vi

$$\int \frac{3x^2 - x - 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x}{x^2+3} dx + \int \frac{3}{x^2+3} dx = I_1 + I_2 + I_3.$$
 Nu löses integralerna:

$$I_1 = \ln|x-2| + C_1, \quad I_2 = \ln(x^2+3) + C_2, \quad I_3 = \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C_3.$$

De primitiva funktionerna ges alltså av $\ln|x-2| + \ln(x^2+3) + \sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

10. Implicit derivering map x ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$. Vi ser att

$f'(1) = 0$ dvs $x = 1$ är en kritisk punkt till f . Vi använder 2:a derivatatestet för att avgöra punktens karaktär och deriverar implicit en gång till:

$$y'' = \frac{(2x - y')(x + y^2) - (x^2 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}. \quad x = y = 1, \quad y' = 0 \Rightarrow f''(1) = 1 > 0. \quad \text{Det}$$

ger att $x = 1$ är en lokal minpunkt.

11. Skärningslinjen fås ur systemet

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}. \quad z = t \Rightarrow y = 2 - t \Rightarrow x = -3 + 2t. \quad \text{Skärningslinjens ekv på parameter-}$$

$$\text{form är alltså } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}. \quad \text{Låt } P \text{ vara punkten } (1, 1, 1) \text{ och } Q \text{ punkten } (-3, 2, 0)$$

på skärningslinjen. Vi bildar vektorn $\bar{u} = (4, -2, 1)$ från Q till P . Denna vektor projiceras ortogonalt på skärningslinjens riktningsvektor $\bar{v} = (2, -1, 1)$. Det ger vektorn

$$\bar{w} = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} = \frac{11}{6} (2, -1, 1). \quad \text{Det sökta avståndet ges av}$$

$$\|\bar{u} - \bar{w}\| = \left\| (4, -2, 1) - \frac{11}{6} (2, -1, 1) \right\| = \frac{1}{6} \|(2, -1, -5)\| = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ le}.$$

12. Vi observerar att $0 < \cos \frac{1}{n} < 1$ för $n \geq 1$. Det ger att alla termer i serien är negativa.

För att undersöka hur termerna ser ut för stora n använder vi Maclaurinutveckling:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4), \quad \ln(1 - t) = -t + O(t^2) \Rightarrow \ln(\cos t) = -\frac{t^2}{2} + O(t^4). \quad \text{Ur detta fås}$$

$$\text{med } t = \frac{1}{n}: \quad \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad \text{Vi använder nu jämförelseprincipen (Limit}$$

Comparison Test) på den positiva serien $-\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)$ och väljer i enlighet med ovan-

stående $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som jämförelseserie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2}. \quad \text{Då jämförelseserien är konver-}$$

gent är även den givna serien det. (Gränsvärdet kan även beräknas med l'Hospitals regel)

