

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 050824

Del 1

$$1. \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & a-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a-2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2a & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

För $a = 0$ saknas lösning.

$$2. \text{Kvadratkomplettering ger } (z - \frac{i}{2})^2 - \frac{i^2}{4} + 1 + 3i = 0 \Rightarrow (z - \frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i. \text{ Vi inför nu}$$

$$w = z - \frac{i}{2} = a + ib \Rightarrow \operatorname{Re} w^2 = a^2 - b^2 = -\frac{5}{4}, \operatorname{Im} w^2 = 2ab = -3, |w^2| = a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4}.$$

$$\text{Vi får systemet } \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{5}{4} & (1) \\ 2ab = -3 & (2) \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} & (3) \end{cases} \begin{cases} (1) + (3) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ (3) - (1) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \\ (2) \Rightarrow ab < 0 \end{cases}$$

Detta ger

$$w_1 = 1 - \frac{3}{2}i, w_2 = -1 + \frac{3}{2}i \Rightarrow z_1 = 1 - \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = 1 - i, z_2 = -1 + \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = -1 + 2i.$$

$$3. \text{Implicit derivering ger } -\frac{8}{(x+y)^{3/2}}(1+y') + y + xy' + 2x = 0. \text{ Insättning av punkten ger}$$

$$-(1+y') + 1 + 3y' + 6 = 0 \Rightarrow y'(3) = -3. \text{ Tangentlinjens ekvation blir alltså}$$
$$y - 1 = -3(x - 3) \Rightarrow 3x + y = 10.$$

$$4. \text{Karakteristiska ekvationen är } r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm i. \text{ Det ger allmän lösning}$$

$$y(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x) \Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}(A \cos x + B \sin x) + e^{2x}(-A \sin x + B \cos x).$$

Begynnelsevillkoren ger $y(0) = A = 1$, $y'(0) = 2A + B = 5 \Rightarrow B = 3$. Den sökta lösningen är alltså $y(x) = e^{2x}(\cos x + 3 \sin x)$.

$$5. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \{ \text{partiell int} \} = [x^2 \sin x]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = \{ \text{partiell int} \} =$$
$$= -2 \left\{ [-x \cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx \right\} = 4\pi - 2[\sin x]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

6. $\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+3}{n+4} = -\frac{2}{(n+2)(n+4)} = -\frac{2}{n^2+6n+8}$. Serien är konvergent om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$ är konvergent. $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Då den sista serien är en konvergent p-serie ($p=2>1$) är den givna serien konvergent enligt majorantprincipen (Comparison Test).

7. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l'Hospitals regel (samma typ fås i bägge stegen) ger $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2}$.

8. De sökta värdena måste antas i kritiska punkter eller i intervallets ändpunkter eftersom singulära punkter saknas. Vi söker kritiska punkter:

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1-x^2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad f(-2) = e^2, \quad f(-1) = 0, \\ f(1) = 4e^{-1}, \quad f(2) = 9e^{-2}.$$

Det betyder att det största värdet är e^2 och det minsta är 0 .

Del 2

9. Vi partialbråksuppdelar integranden: $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$.

Multiplikation med $(1+x)^2(1+x^2)$ och förenkling ger

$$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1. \text{ Identifikation ger}$$

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ A+B+2C+D &= 0 \\ A+C+2D &= 0 \\ A+B+D &= 1 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2}, \quad D=0. \text{ Integralen kan då skrivas som}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2} \right] dx = \frac{1}{2} \left[\ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + 1) = \\ = \frac{1}{4} (\ln 2 + 1).$$

10. Skärningspunkten mellan den givna linjen och planet fås:

$-3 + 2t + 2(-3 + t) - (-1 - t) = 2 \Rightarrow t = 2$. Det ger skärningspunkten $(1, -1, -3)$. Den sökta linjen är ortogonal mot den givna linjens riktningsvektor $(2, 1, -1)$ och mot planets normalvektor $(1, 2, -1)$. Som riktningsvektor för den sökta linjen kan vi då ta

$$\text{vektorn } (2, 1, -1) \times (1, 2, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 3).$$

$$(x, y, z) = (1, -1, -3) + t(1, 1, 3) \quad , \quad -\infty < t < +\infty .$$

11. Vi måste ha $\frac{1+x}{1-x} > 0$. För $1-x > 0$ fås då $1+x > 0$ dvs $-1 < x < 1$.

För $1-x < 0$ fås då $1+x < 0$ dvs lösning saknas. Definitionsområdet är alltså intervallet $-1 < x < 1$. Vi visar nu att f är växande på intervallet:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \left[\frac{1-x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right] = \frac{1}{1-x^2} > 0 \text{ på intervallet.}$$

f är därmed växande och alltså inverterbar. Det gäller att $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f^{-1}(\ln \sqrt{3}) \Rightarrow (f^{-1})'(\ln \sqrt{3}) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

12. Serien är absolutkonvergent om $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos n\pi}{n \ln n} \right|$ är konvergent. $\cos n\pi = (-1)^n$ och

$\ln n > 0$, $n \geq 2$ ger $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. För studiet av denna serie använder vi integral-

$$\text{kriteriet: } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^R \frac{dt}{t} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - \ln(\ln 2)) = \infty. \text{ Då är}$$

även serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergent dvs den givna serien är inte absolutkonvergent. Är

den betingat konvergent? Vi använder Leibniz'sats om alternerande serier. Vår serie

$$\text{kan ju skrivas } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}. \text{ Låt } a_n = \frac{1}{n \ln n} :$$

$$1. \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 2$$

$$2. \quad a_{n+1} \leq a_n, \quad n \geq 2$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

2. och 3. gäller eftersom $\ln x$ är en växande funktion. Enligt satsen är då den givna serien konvergent. Den måste då vara betingat konvergent enligt ovan.

