

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 060206

Del 1

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a \\ a & 1-a & 1 \end{vmatrix} = (a+1) - a(1-a) = a^2 + 1 \neq 0 \text{ för alla } a \Rightarrow \text{inverterbarhet.}$$

För $a = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Kvadratkomplettering ger $(z + \frac{1+i}{2})^2 - \frac{(1+i)^2}{4} + 2 - i = 0 \Rightarrow (z + \frac{1+i}{2})^2 = -2 + \frac{3}{2}i$. Vi inför nu

$$w = z + \frac{1+i}{2} = a + ib \Rightarrow \operatorname{Re} w^2 = a^2 - b^2 = -2, \operatorname{Im} w^2 = 2ab = \frac{3}{2}, |w^2| = a^2 + b^2 = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Vi får systemet
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -2 & (1) \\ 2ab = \frac{3}{2} & (2) \\ a^2 + b^2 = \frac{5}{2} & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} (1) + (3) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \\ (3) - (1) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \\ (2) \Rightarrow ab > 0 \end{cases}.$$

Detta ger

$$w_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \quad w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1+i}{2} = i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{1+i}{2} = -1 - 2i.$$

3. Implicit derivering ger $y' + e^{-y} + xe^{-y}(-y') = 0$. Insättning av punkten (0,1)

$$y' + e^{-1} = 0 \Rightarrow y'(0) = -e^{-1}. \text{ Tangentlinjens ekvation blir alltså}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{e}x \Rightarrow \frac{1}{e}x + y = 1.$$

4. Funktionen är kont. på ett slutet och begränsat intervall. Då antar den ett största och ett minsta värde där. Det sker i en kritisk punkt eller en ändpunkt eftersom singulära punkter saknas.

$$f'(x) = \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow x = 8.$$

$$f(3) = 9, f(8) = 16, f(11) = 11 \Rightarrow 9 \leq f(x) \leq 16. \text{ Värdet } 8 \text{ antas alltså inte.}$$

5. Volymen ges av $\pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \text{ ve.}$

6. Den homogena ekvationens karakteristiska ekv är $r^2 + r = 0 \Rightarrow r = 0, -1$. Det ger den

allmänna lösningen till den homogena ekvationen: $y_h(x) = A + Be^{-x}$. Som partikulär-
lösning antar vi $y_p(x) = a \cos x + b \sin x$. Denna deriveras två gånger:

$y'_p(x) = -a \sin x + b \cos x \Rightarrow y''_p(x) = -a \cos x - b \sin x$. Insättning i differens-
ekvationen ger

$$(b - a) \cos x - (a + b) \sin x = 2 \sin x \Rightarrow \begin{cases} b - a = 0 \\ b + a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = -\cos x - \sin x.$$

Differens-ekvationens allmänna lösning är alltså $y(x) = A + Be^{-x} - \cos x - \sin x$.

7. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l'Hospitals regel (samma typ fås

i bägge stegen) ger $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x}{\ln(1+x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{-1}{(1+x)^2}} = -1.$

Del 2

8. Vi söker skärningslinjens ekv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -2, 0) + t(1, 9, 4).$$

Låt $P(1,1,1)$ och $Q(1,-2,0)$. Bilda nu vektorn från Q till P : $(0,3,1)$. En normalvektor till
planet fås om vi bildar kryssprodukten mellan denna vektor och en riktningsvektor till linjen

t ex $(1,9,4) : (0,3,1) \times (1,9,4) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (3,1,-3)$. Det sökta planets ekvation ges då av

$3x + y - 3z = C$. Insättning av t ex punkten Q ger $C = 1$.

$$9. \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\arctan x}{x^3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\arctan x}{2x^2} \right]_1^R + \frac{1}{2} \int_1^R \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{\pi}{4} \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} I_1.$$

För att beräkna integralen I_1 partialbråsuppdelar vi integranden:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \{symm \Rightarrow A=C=0\} = \frac{B}{x^2} + \frac{D}{1+x^2} \Rightarrow B(1+x^2) + Dx^2 = 1.$$

Det ger omedelbart $B=1$ och $D=-1$ ur vilket fås:

$$\frac{1}{2} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^R = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{R} - \arctan R \right). \text{ Den generaliserade}$$

$$\text{integralens värde är då } \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{R} - \arctan R \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

10. Låt trådens högra fästpunkt vara (a, b) . Trådens längd är $\int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = 1$. Trådens

lutning ges av $y' = \sqrt{e^{2x} - 1} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$. Vi får då ekvationen

$$1 = \int_0^a e^x dx = [e^x]_0^a = e^a - 1 \Rightarrow a = \ln 2. \text{ } y\text{-koordinaten för trådens högra fästpunkt fås:}$$

$$b = y(a) = y(\ln 2) - y(0) = \int_0^{\ln 2} y'(x) dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{e^{2x} - 1} \\ dx = \frac{u}{1+u^2} du \end{array} \right\} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2} du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du = [u - \arctan u]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctan \sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Trådens högra fästpunkt har alltså koordinaterna $(\ln 2, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$.

11. Vi gör först den förenklande omskrivningen

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{(\sqrt{n} + (-1)^n)(\sqrt{n} - (-1)^n)} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{n-1}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \text{ är alternerande och vi kan använda Leibniz'sats om alternerande serier.}$$

Vår serie kan skrivas $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ där $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Eftersom det uppenbarligen gäller att

1. $a_n \geq 0$, $n \geq 2$
2. $a_{n+1} \leq a_n$, $n \geq 2$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

så är serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}$ konvergent. Men serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \{m = n-1\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ är divergent

(p – serie med $p = 1$). Alltså är den givna serien skillnaden mellan en konvergent och en divergent serie dvs den är divergent.