

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 060602

Del 1

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4a & 1 & 4a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4a-2 & -1 & 4a-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4(a-1) & 0 & 4(a-1) \end{bmatrix}$$

Vi får två fall: $a \neq 1$, $a = 1$. I första fallet kan vi dividera rad 3 med $4(a-1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ dvs entydig lösning } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{I det andra fallet fås } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = t \Rightarrow y = -1 + \frac{1}{2}t \Rightarrow x = 4 - \frac{3}{2}t \text{ dvs}$$

$$\text{oändligt många lösningar } \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty) .$$

2. Det givna planets normalvektor $(2, -4, 2)$ är parallell med det sökta planet. En normalvektor till det sökta planet ges då av kryssprodukten mellan $(2, -4, 2)$ och linjens rikt-

$$\text{ningsvektor } (3, 2, -1) : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, 8, 16) . \text{ Vi kan välja } (0, 1, 2) \text{ och en ekvation}$$

för det sökta planet är $y + 2z = C$ där C bestäms genom insättning av en punkt på planet, tex $(-1, 5, 2) : 5 + 4 = C$ ger $C = 9$.

$$3. \text{ Vi deriverar implicit map } x : 4 \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{y^2}} \cdot 2 \left(\frac{y - xy'}{y^2} \right) = \pi . \quad x = 1 \Rightarrow \arctan \frac{2}{y} = \frac{\pi}{4} .$$

Det ger $y = 2$. Insättning av punkten $(1, 2)$ ger $2 - y'(1) = \pi$ dvs den sökta lutningskoefficienten är $2 - \pi$.

4. Vi använder l'Hospitals regel två gånger eftersom gränsvärdet i bägge stegen är av

$$\text{typen } \frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{\pi \cos(\pi x) + \frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{-\pi \sin(\pi x) - \frac{\pi}{x^2}} = \frac{\pi^2}{-\pi} = -\pi .$$

5. Vi använder partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}. \text{ Det ger systemet}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B = -1, C = 1. \text{ Det ger integralen}$$

$$\int_2^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| \right]_2^3 = 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6}.$$

6. Serien är positiv. För stora n gäller att $\frac{n+1}{n^2+1} \approx \frac{1}{n}$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent

(p -serie med $p = 1$) är troligen den givna serien också det. Vi gör en uppskattning:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \text{ Alltså är den givna serien divergent.}$$

7. $f'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = 2\left(\frac{1}{x^{1/3}} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 1$. Detta ger att $x = 0$ är en singular punkt.

Randpunkter är $x = \pm 1$. I dessa intressanta punkter får vi funktionsvärdena

$f(-1) = 5$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Det minsta värdet är alltså 0 och det största är 5.

Del 2

8. Den givna roten ger faktorn $z + i$. Division med denna ger att

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (3+2i)z - 5 = (z+i)(z^2 - 3(1+i)z + 5i). \text{ Vi söker nu nollställena till}$$

$$\text{den andra faktorn. Kvadratkomplettering ger } \left(z - \frac{3}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{i}{2}.$$

$$\text{Låt } z - \frac{3}{2}(1+i) = w = x + iy \text{ (1). Detta ger systemet } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -\frac{1}{2} & (3) \\ x^2 + y^2 = |w^2| = \frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow 2x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \quad (4) - (2) \Rightarrow 2y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}. \text{ (3) ger att } x \text{ och } y$$

$$\text{har olika tecken dvs } w_1 = \frac{1}{2}(1-i), w_2 = \frac{1}{2}(-1+i). \text{ (1) ger slutligen } \begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = 1+2i \end{cases}$$

9. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Vi har "resonans" och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x) = Cxe^x$. Detta ger $y_p'(x) = C(x+1)e^x \Rightarrow y_p''(x) = C(x+2)e^x$. Insättning i differentialekvationen ger $C(x+2-x)e^x = e^x \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 \Rightarrow B = 0$. $y(0) = 1$ ger då att $A = 1$ och den sökta lösningen är $y(x) = (1 + \frac{x}{2})e^x$.

10. Integranden är positiv och obegränsad vid $x = 0$. Integrationsintervallet är obegränsat. Vi delar upp intervallet:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} = I_1 + I_2.$$

På intervallet $]0,1]$ gäller att $\sqrt{x}(1+x^2) > \sqrt{x}$. Det ger att

$$I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2 \quad \text{dvs } I_1 \text{ är konvergent.}$$

På intervallet $[1, \infty[$ gäller att $\sqrt{x}(1+x^2) \geq 1+x^2$. Det ger att

$$I_2 \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan x]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan R - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{dvs } I_2 \text{ är}$$

konvergent. Då följer slutligen att även $I = I_1 + I_2$ är konvergent.

11. Låt $P(n) = \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$. $P(2) : VL = \frac{3}{4} = HL$ dvs $P(2)$ är sann.

Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} &= \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1-1)^2 (n+1)^2} = \{\text{induktionsantagande}\} = \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = 1 + \frac{2n+1-(n+1)^2}{n^2 (n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Då är $P(n)$ sant för $n \geq 2$ enligt induktionsprincipen.