

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 070205

Del 1

1. $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Inversen beräknas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 & -15 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 46 & -15 & 6 \\ -15 & 5 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Den sökta linjens riktningsvektor ges av $(3,1,-1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,5)$.

Skärningspunkten fås ur systemet
$$\begin{cases} 17 + 3s = 1 + t \\ 4 + s = -3 + 2t \\ -8 - s = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3s - t = -16 & (1) \\ s - 2t = -7 & (2) \\ -s + t = 6 & (3) \end{cases}$$

Systemet måste ha entydig lösning eftersom linjerna skär varandra. (2) + (3) ger $t = 1$. Insättning i ekvationen för den första linjen ger skärningspunkten $(2, -1, -3)$. Den sökta linjens ekvation är då $(x, y, z) = (2, -1, -3) + t(1, 2, 5) \quad (-\infty < t < +\infty)$.

3. Eftersom alla koefficienter är reella måste även $z = \bar{i} = -i$ vara en rot. Det ger att $(z+i)(z-i) = z^2 + 1$ är en faktor i polynomet. Vid division av polynomet med denna faktor fås faktorn $z^2 - 2z - 24$. Ekvationens övriga rötter fås då ur ekvationen $z^2 - 2z - 24 = 0 \Rightarrow z = -4, 6$. Ekvationens rötter är alltså $z = -4, 6, -i, i$.

4. Vi observerar att $D(f) = [-1, 1]$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ ger den kritiska

punkten $x = \frac{1}{2}$. Ändpunkterna $x = \pm 1$ är även singulära. $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} > \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$. Det ger att det minsta värdet är $-\frac{\pi}{2}$ och

det största är $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

5. Konvergensradien är

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2. \text{ Konvergensintervallet}$$

är då $-2 < x < 2$. Vi undersöker ändpunkterna:

$$x = -2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ som är absolutkonvergent } (p = 2 > 1).$$

$$x = 2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ som är konvergent.}$$

Serien är alltså konvergent för $-2 \leq x \leq 2$.

6. Vi deriverar implicit map $x: e^x y' + y e^x + e^y + x e^y y' = y + x y'$. Insättning av punkten ger $y' + 1 + e = 1 \Rightarrow y' = -e$. Normallinjens ekv är då $y - 1 = \frac{1}{e} x$.

$$7. \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} x \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi/2} + I = \frac{\pi^2}{16} + I \text{ där}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x \sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}. \text{ Den}$$

givna integralen har alltså värdet $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

Del 2

8. Det givna nollstället ger faktorn $z - i$. Division med denna ger att

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (1 - 4i)z + 5 - i = (z - i)(z^2 + (1 - 2i)z + 1 + 5i). \text{ Vi söker nu nollställena till den andra faktorn. Kvadratkomplettering ger } (z + \frac{1}{2}(1 - 2i))^2 = -\frac{7}{4} - 6i.$$

$$\text{Låt } z + \frac{1}{2}(1 - 2i) = w = x + iy \text{ (1). Detta ger systemet } \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{7}{4} & (2) \\ 2xy = -6 & (3) \\ x^2 + y^2 = |w^2| = \frac{25}{4} & (4) \end{cases}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow 2x^2 = \frac{18}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \quad (4) - (2) \Rightarrow 2y^2 = \frac{32}{4} \Rightarrow y = \pm 2. \quad (3) \text{ ger att } x \text{ och } y$$

$$\text{har olika tecken dvs } w_1 = \frac{3}{2} - 2i, w_2 = -\frac{3}{2} + 2i. \quad (1) \text{ ger slutligen } \begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = -2 + 3i \end{cases}$$

9. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 8r + 16 = 0 \Rightarrow r = 4, 4$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x) = (Ax + B)e^{4x}$.

Vi har "resonans" och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x) = x^2(ax + b)e^{4x}$.

Detta ger

$$y_p'(x) = (4ax^3 + (3a + 4b)x^2 + 2bx)e^{4x} \Rightarrow$$

$$y_p''(x) = (16ax^3 + (24a + 16b)x^2 + (6a + 16b)x + 2b)e^{4x}.$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{4x} :

$$-16bx^2 + 6ax = x \Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = 0 \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^{4x}.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B + \frac{1}{6}x^3)e^{4x}. \quad y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = (A + \frac{1}{2}x^2 + 4Ax + \frac{2}{3}x^3)e^{4x} \Rightarrow y'(0) = A = 1.$$

$$\text{Den sökta lösningen är alltså } y(x) = (x + \frac{1}{6}x^3)e^{4x}.$$

10. Volymen ges av

$$\begin{aligned} \pi \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \sin t \\ dx = 4 \cos t dt \end{array} \right\} = 256\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 256\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 64\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 32\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 32\pi \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi/2} = 16\pi^2 \text{ ve}. \end{aligned}$$

11. Integranden är positiv och obegränsad vid $x = 0$. Integrationsintervallet är obegränsat. Vi delar upp intervallet:

$$I = \int_0^\infty \frac{(x+1)}{\sqrt{x^5+5x}} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^5+5x}} dx + \int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^5+5x}} dx = I_1 + I_2.$$

På intervallet $(0,1]$ gäller $x+1 \leq 2$, $\sqrt{x^5+5x} > \sqrt{5x} > \sqrt{x}$. Det ger att

$$I_1 < 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [4\sqrt{x}]_0^1 = 4. \text{ dvs } I_1 \text{ är konvergent.}$$

På intervallet $[1,\infty)$ gäller $\sqrt{x^5+5x} > \sqrt{x^5}$, $x+1 \leq 2x$. Det ger att

$$I_2 < 2 \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{5/2}} dx = 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^R = -4 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{R}} - 1 \right) = 4 . \quad \text{dvs } I_2 \text{ är}$$

konvergent. Då följer slutligen att även $I = I_1 + I_2$ är konvergent.