

Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 070531

Del 1

1. Vi bestämmer inversen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^T + 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Vi beräknar}$$

determinanten av denna matris:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \text{ Det betyder att inversen finns.}$$

2. En riktningsvektor för linjen är $(2,3,-2) - (1,-2,3) = (1,5,-5)$. En parametrisering av linjen är då $(x,y,z) = (1,-2,3) + t(1,5,-5)$, $-\infty < t < +\infty$. Parametervärdet för skärningspunkten fås genom insättning i planets ekvation:
 $2(1+t) + 3(-2+5t) + 4(3-5t) = -1 \Rightarrow t = 3$. Insättning i linjens vektorekvation ger skärningspunkten $(4,13,-12)$.

3. Implicit derivering ger $\frac{1}{2\sqrt{3x+y}}(3+y') + 2x + 4yy' = 0$. Insättning av punkten $(0,1)$

$$\text{ger } \frac{1}{2}(3+y') + 4y' = 0 \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{3}. \text{ Tangentlinjens ekvation blir alltså}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

4. Lokala extremvärden kan finnas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära

$$\text{punkter. } f'(x) = \frac{x^2 - 3x - (x+1)(2x-3)}{x^2(x-3)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2(x-3)^2}. \text{ Vi ser att singulära}$$

punkter saknas. Kritiska punkter fås ur $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -3$. Det ger att

$x = 1$ är kritisk punkt. Ändpunkter är $x = \frac{1}{2}$ och $x = 2$. Teckenstudium av $f'(x)$

ger att tecknet är positivt mellan $x = \frac{1}{2}$ och $x = 1$ och negativt mellan $x = 1$ och 2 .

Det ger enligt förstaderivatatestet att f har lokala minima i ändpunkterna och lokalt maximum i $x = 1$.

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 3 \\ du = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_3^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_3^R \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_3^R = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{6}.$$

6. Den homogena ekvationens karakteristiska ekv är $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2$. Det ger den allmänna lösningen till den homogena ekvationen: $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}$. Som partikulär-lösning antar vi $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Denna deriveras två gånger:

$$y'_p(x) = 2ax + b \Rightarrow y''_p(x) = 2a. \text{ Insättning i differentialekvationen ger}$$

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1 \Rightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = x^2 + 1.$$

$$\text{Det ger ekvationerna } 2a = 1, 2b - 6a = 0, 2a - 3b + 2c = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 9). \text{ Differentialekvationens allmänna lösning är alltså}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 9).$$

7. Vi partialbråksuppdelar :

$$\frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + 2A - C}{(x-1)(x^2 + 2)}. \text{ Det ger systemet}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 & (1) \\ -B + C = 0 & (2) \\ 2A - C = 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow A = B = C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2}. \text{ Vi får}$$

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} \right) dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + I_1 \text{ där}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \text{ där vi kan välja } C = 0.$$

Del 2

8. Planets normalvektor $(2, 1, -1)$ är riktningsvektor för normallinjen L genom P och Q . Normallinjens vektorekv är då $(x, y, z) = (3, 1, -1) + t(2, 1, -1)$, $-\infty < t < +\infty$. Att L skär planet i Q ger då $2(3+2t) + 1 + t + 1 + t = 6 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$. Insättning i linjens vektorekv ger

$(x, y, z) = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ som alltså är koordinaterna för Q . Det sökta avståndet ges då av

längden av vektorn mellan P och Q dvs av $\left\| (3, 1, -1) - (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \right\| = \left\| (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{3} le$.

9. f är kontinuerlig och definierad för alla x , dvs ändpunkter saknas.

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(1+x^2) - x(1-x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = 2 \frac{1-x}{(1+x^2)^2}.$$
 Vi ser att singulära punkter

saknas och att den enda kritiska punkten är $x = 1$ och att $f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Vidare

$$\text{gäller att } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} + \arctan x \right) = -1 \pm \frac{\pi}{2}.$$
 Det största värdet är alltså $\frac{\pi}{4}$

och funktionen kommer godtyckligt nära värdet $-1 - \frac{\pi}{2}$. Värdeområdet ges alltså av

$$\text{intervallet } \left[-1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right].$$

$$10. f \text{ är definierad för } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = 4 \frac{1-x}{\sqrt{1-4x^2}} > 0$$

för $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ dvs f är strängt växande och alltså inverterbar. $D(f^{-1}) = R(f)$.

$$f(-\frac{1}{2}) = 2 \arcsin(-1) + 0 = -\pi \text{ och } f(\frac{1}{2}) = 2 \arcsin(1) + 0 = \pi.$$
 Då f är kontinuerlig

och växande på intervallet fås att $D(f^{-1}) = R(f) = [-\pi, \pi]$. Allmänt gäller att

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0. f'(0) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}.$$

11. Ledningen: Vi bildar funktionen

$$f(x) = \ln(1+x) - x, x \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \leq 0, x \geq 0 \Rightarrow f \text{ är avtagande.}$$

Eftersom $f(0) = 0$ gäller att $f(x) \leq 0, x \geq 0$ dvs olikheten är bevisad. Detta ger

$$\text{att } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+ne^{-n^2}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}.$$
 Eftersom den givna serien är positiv är den, enligt

”Comparison Test”, konvergent om serien i olikhetens högra led är konvergent.

För att visa det kan man t ex använda integraltestet:

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R xe^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_1^R = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-R}) = \frac{1}{2e}.$$
 Då integralen

är konvergent är också serien $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ konvergent och alltså är även den givna serien konvergent.