Lösningar till tentamen i kurserna SF1616 och 5B1130
Matematiska metoder I, för S 080211

Del 1

1. $AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$. Determinanten beräknas:

   $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0$. Det betyder att matrisen saknar invers för varje värde på a.

2. Det sökta planets normalvektor är ortogonal mot det givna planets normalvektor (1,1,1) och mot vektorn (4,5,7)-(3,5,5) = (1,0,2). En normalvektor ges då av

   $(1,1,1)\times(1,0,2) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,-1,-1)$. Ekvationen för det sökta planet är då

   $2x - y - z = C$. Insättning av tex punkten $(3,5,5)$ ger $C = -4$.

3. Vi visar att f är växande och därmed injektiv (one-to-one) vilket betyder att inversen existerar: $f'(x) = \dfrac{1+4x^2-8x^2}{(1+4x^2)^2} + \dfrac{2}{1+4x^2} = \dfrac{3+4x^2}{(1+4x^2)^2} > 0$ för alla x

   dvs f är växande.

4. $f'(x) = (2x-1)e^x + (x^2-x-1)e^x = (x^2+x-2)e^x = 0$ ger de kritiska punkterna $x = -2,1$. Singulära punkter saknas. Ändpunkterna är $x = \pm 3$. Funktionsvärdena i dessa intressanta punkter är:
   $f(-3) = 11e^{-3}$, $f(-2) = 5e^{-2}$, $f(1) = -e$, $f(3) = 5e^3$. Det minsta värdet är alltså $-e$ och det största är $5e^3$. Då f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall antas dessa värden och alla däremellan. Det ger $R(f) = \left[-e, 5e^3\right]$.

5. Låt $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{n+1}$. Konvergensradien R ges av

   $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n+2}\cdot\dfrac{n+1}{2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2} = 2 \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}$. Serien är då absolut-

   konvergent för $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ och divergent för $|x| > \dfrac{1}{2}$. Ändpunkterna studeras:

$x=-\frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\{m=n+1\}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ som är en divergent p - serie $(p=1)$.

$x=\frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ som är alternerande. Talföljden $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ är positiv, monotont avtagande och har gränsvärdet noll. Serien är då konvergent enligt ”Alternating Series Test”. Potensserien är alltså konvergent för $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$.

6. Vi deriverar implicit map x : $\frac{1}{x^2+xy}(2x+y+xy')+2+y'\cos y=0$. Insättning av punkten ger $2+y'+2+y'=0\Rightarrow y'=-2$. Tangentlinjens ekvation är då $y-0=-2(x-1)$ dvs $y=-2x+2$.

7.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\begin{Bmatrix}u=\sqrt{x-1}\\ 2udu=dx\end{Bmatrix}=2\int_1^{\infty}\frac{u}{(u^2+1)u}du=2\lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{du}{u^2+1}=2\lim_{R\to\infty}\left[\arctan u\right]_1^R=$$

$$=2\lim_{R\to\infty}(\arctan R-\arctan 1)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Del 2

8. Det homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2+1=0\Rightarrow r=\pm i$.
Det ger den allmänna lösningen till den homogena ekvationen:
$y_h(x)=A\cos x+B\sin x$.
Vi har ”resonans” och ansätter som partikulärlösning
$y_p(x)=ax+b+x(c\cos x+d\sin x)\Rightarrow$
$y_p'(x)=a+c\cos x+d\sin x+x(-c\sin x+d\cos x)\Rightarrow$
$y_p''(x)=2d\cos x-2c\sin x-x(c\cos x+d\sin x)$.
Insättning i diffekvationen ger $2d\cos x-2c\sin x+ax+b=4x+10\sin x$.
Detta ger $c=-5$, $d=0$, $a=4$, $b=0\Rightarrow y_p(x)=4x-5x\cos x$ och den allmänna lösningen blir $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=A\cos x+B\sin x+4x-5x\cos x$.
$y'(x)=-A\sin x+B\cos x+4-5\cos x+5x\sin x$. De givna villkoren ger nu

$$\begin{cases}-A+4\pi+5\pi=0\\ -B+4+5\quad=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=9\pi\\ B=7\end{cases}$$ Den sökta lösningen är alltså

$y(x)=9\pi\cos x+7\sin x+4x-5x\cos x$.

9. De sökta värdena måste antas i kritiska punkter, singulära punkter eller i intervallets ändpunkter. $f'(x)$ fås direkt ur Integralkalkylens Fundamentalsats:

$f'(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)(x^2+1)}$. Det ger den kritiska punkten $x = 1$. Vi ser också att $f(0) = 0$ och att singulära punkter saknas. För att kunna beräkna $f(1)$ och $f(2)$ måste vi bestämma $f(x)$. Vi använder partialbråksuppdelning:

$$\frac{1-t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A + C}{(t+1)(t^2+1)}$$. Ur detta fås systemet

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$ vilket ger

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^x = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$. Ur detta

fås $f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$, $f(2) = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 = \ln\frac{3}{\sqrt{5}}$. Vi observerar att

$\sqrt{10} > 3 \Rightarrow \sqrt{2} > \dfrac{3}{\sqrt{5}} > 1$. Då logaritmfunktionen är växande får vi slutligen att det minsta värdet är 0 och det största är $\ln\sqrt{2}$.

10. Låt $\bar{v}$ och $\bar{n}$ vara linjens riktningsvektor respektive planets normalvektor. En riktningsvektor för den sökta linjen ges då av $\bar{u} = \bar{v} - proj_{\bar{n}}\bar{v}$. Vi avläser att $\bar{v} = (3,5,1)$ och $\bar{n} = (2,1,-2)$ vilket ger projektionsvektorn:

$$proj_{\bar{n}}\bar{v} = \frac{(\bar{v}\cdot\bar{n})}{\|\bar{n}\|^2}\bar{n} = \frac{3\cdot 2 + 5\cdot 1 - 1\cdot 2}{2^2 + 1^2 + (-2)^2}(2,1,-2) = (2,1,-2) \Rightarrow \bar{u} = (3,5,1) - (2,1,-2) = (1,4,3) .$$

En punkt på den sökta linjen är skärningspunkten mellan den givna linjen och planet. Parametervärdet för den fås genom insättning av den givna linjen i planets ekvation: $2(4+3t) + 5t - 2(-2+t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -1$. Det ger punkten (1,-5,-3) . Den sökta linjen har alltså ekvationen $(x,y,z) = (1,-5,-3) + t(1,4,3)$ $(-\infty < t < +\infty)$.

11. Vi har serien $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ där $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln(1+\dfrac{a}{n})$. Vi ser att $a > -2$. För att se hur a_n uppför sig för stora n – värden Maclaurinutvecklar vi $\ln(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \ , \ -1 < x < 1 . \ x = \frac{a}{n} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1+a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \frac{a^3}{3n^3} - \ldots$$

Vi ser att för $a > -1$ är serien så småningom positiv. För $-2 < a \le -1$ är den så småningom negativ. I bägge fallen kan konvergenstest för positiva serier användas.

För $a \ne -1$ jämför vi med serien $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ som är en divergent p – serie $(p = 1)$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} na_n = a+1$. "Limit Comparison Test" ger då att serien är divergent.

För $a = -1$ jämför vi med serien $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som är en konvergent p – serie (p=2>1) :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{-n^2} = -\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{a^2}{2}$. "Limit Comparison Test" ger då att serien är konvergent.
Serien är alltså konvergent endast för a = -1 .