Lösningar till tentamen i kurserna SF1616 och 5B1130
Matematiska metoder I, för S 080529

Del 1

1. Vi löser systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -11 & a & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & a-6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+5 & 0 \end{bmatrix}.$$

a = -5 ger oändligt många lösningar: $z = -t \Rightarrow (x, y, z) = t(2,1,-1)$.

2. Låt punkterna betecknas A , B resp C . Vi bildar vektorerna från A till B resp från A till C : $(1,1,2)-(2,0,-1)=(-1,1,3)$ och $(3,1,-2)-(2,0,-1)=(1,1,-1)$.

En normalvektor till planet ges då av $(-1,1,3)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,-2)$.

Vi väljer $\bar{n} = (2,-1,1)$. Det ger planets ekvation: $2x - y + z = K$. Insättning av valfri punkt ger $K = 3$. Vinkeln θ mellan planets normalvektor och linjen fås ur skalärprodukten mellan $\bar{n}$ och linjens riktningsvektor $\bar{v} = (1,1,2)$:

$$\bar{n}\cdot\bar{v} = \begin{cases} (2,-1,1)\cdot(1,1,2) = 2-1+2 = 3 \\ \|\bar{n}\|\|\bar{v}\|\cos\theta = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\theta = 6\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$. Vinkeln

mellan planet och linjen är då $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. Efter omskrivningen $\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ fås:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} + \frac{x}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 .$$

4. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i \Rightarrow y_h(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = ae^{2x} + b\cos x + c\sin x$. Insättning i differentialekvationen ger då

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = 4ae^{2x} - b\cos x - c\sin x - 2(2ae^{2x} - b\sin x + c\cos x) +$$
$$+ 2(ae^{2x} + b\cos x + c\sin x) = 2ae^{2x} + (b-2c)\cos x + (2b+c)\sin x = e^{2x} + \cos x .$$

Ur detta fås $\begin{cases} 2a = 1 \\ b - 2c = 1 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = -\frac{2}{5}$. Den allmänna lösningen är då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x \ .$$

5. Det gäller att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} = \frac{1}{4\ln 2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$. Vi utnyttjar nu att $e < 3$, $\ln e = 1$ och att logaritmfunktionen är växande. Det ger att $\ln n > 1$ för $n \geq 3$ och vi får $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som är en konvergent $p-$serie ($p = 2 > 1$) . Då är den givna serien konvergent enligt ”Comparison Test”.

6. Vi deriverar implicit map x : $\cos(xy^2)\cdot(y^2 + 2xyy') - \sin(xy)\cdot(y + xy') = 0$. Insättning av punkten ger $0 - (1 + \frac{\pi}{2}y') = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{\pi}$. Tangentlinjens ekvation är då

$$y - 1 = -\frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = -\frac{2}{\pi}x + 2 \ .$$

7. Vi partialbråksuppdelar funktionen:

$$\frac{x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + 4A}{x(x^2+4)}$$

. Det ger systemet $\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ 4A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$ Det ger

$$\int f(x)dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4})\, dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + I \text{ där}$$

$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$. En primitiv funktion till $f(x)$ är alltså

$$F(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \text{ där vi valt } C = 0 \ .$$

Del 2

8. Vi ser att $z=1$ är en rot. Division med $z-1$ ger faktorn $z^2-(2+3i)z-1+3i$. Vi söker nollställena till detta polynom. Kvadratkomplettering ger
$$(z-\frac{2+3i}{2})^2-(\frac{2+3i}{2})^2-1+3i=0 \Rightarrow (z-\frac{2+3i}{2})^2=-\frac{1}{4}.$$
$$w=z-\frac{2+3i}{2}=x+iy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-\frac{1}{4} & (1) \\ 2xy \quad =0 & (2) \end{cases}$$
Ur detta system fås $x=0$ ($y=0$ går ej enligt (1) eftersom x är reellt) . (1) ger då att $y=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow w=\pm\frac{i}{2}$. Detta ger slutligen $\begin{cases} z_1=\frac{2+3i}{2}+\frac{i}{2}=1+2i \\ z_2=\frac{2+3i}{2}-\frac{i}{2}=1+i \end{cases}$. De tre rötterna är alltså $z=1,1+i,1+2i$.

9. Områdets area ges av integralen
$$2\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{Bmatrix} x=2\sin\theta \\ dx=2\cos\theta d\theta \end{Bmatrix}=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=$$
$$=\frac{8}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=4\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=4(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

10. $f'(x)=\frac{\cos x-x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}>0$ ty $\cos x>0$ på intervallet och $\sin x<0$, $-\frac{\pi}{2}<x<0$ och $\sin x>0$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Då är f växande på intervallet och har alltså en invers. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)=+\infty$. Då f är kontinuerlig fås $D(f^{-1})=R(f)=(-\infty,+\infty)$. Allmänt gäller att $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. $f(0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$. $f'(0)=1$ ger då att
$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1.$$

11. Integranden är positiv. Låt $T_1 > 0$. Då gäller $\Gamma(x) = \int_0^{T_1} t^{x-1}e^{-t}dt + \int_{T_1}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = I_1 + I_2$.

$e^{-t} \le 1$ för $t \ge 0$ ger att

$$I_1 \le \int_0^{T_1} t^{x-1}dt = \lim_{c\to 0+}\int_c^{T_1} t^{x-1}dt = \lim_{c\to 0+}\left[\frac{t^x}{x}\right]_0^{T_1} = \frac{T_1^{\,x}}{x} - \lim_{c\to 0+}\frac{c^x}{x} = \frac{T_1^{\,x}}{x}$$ $, x > 0$ dvs I_1 är konv.

Vi skriver nu I_2 som $\int_{T_1}^{\infty}\frac{t^{x+1}e^{-t}}{t^2}dt.$ Eftersom $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ för $x > 0$ existerar T

så att $t^{x+1}e^{-t} \le 1$ för $t \ge T$. Låt T_1 ovan vara detta T . Vi får då

$$I_2 \le \int_T^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \lim_{R\to\infty}\int_T^R \frac{dt}{t^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_T^R = \frac{1}{T} - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = \frac{1}{T}$$ dvs I_2 är konv. Eftersom både

I_1 och I_2 är konvergenta är den givna integralen också konvergent.

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ c\to 0+}}\int_c^R t^x e^{-t}dt = \lim_{\substack{R\to\infty\\ c\to 0+}}\left[t^x(-e^{-t})\right]_c^R + x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \lim_{c\to 0+} c^x e^{-c} - \lim_{R\to\infty} R^x e^{-R} + x\Gamma(x) =$$

$$= x\Gamma(x)$$

eftersom de båda gränsvärdena är 0 för $x > 0$.