KTH Matematik

Tentamen i kurserna SF1616 och 5B1130 Matematiska metoder I för S.
Torsdagen den 29 maj 2008 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Bestäm det reella talet a så att ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x - 11y + az = 0 \\ \qquad\quad y + z = 0 \\ -x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$
får oändligt många lösningar. Lös också ekvationssystemet för detta värde på a.

2. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna (2,0,-1), (1,1,2) och (3,1,-2). Beräkna också vinkeln mellan planet och linjen $(x, y, z) = (-3,1,-1) + t(1,1,2)$, $-\infty < t < +\infty$.

3. Beräkna eventuella nollställen till derivatan av funktionen
$$f(x) = \arctan\frac{1-x}{1+x} + \ln\sqrt{1+x^2} \; .$$

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x} + \cos x \; .$$

5. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2 \ln n}$ är konvergent eller divergent.

6. Bestäm ekvationen för tangentlinjen i punkten $(\frac{\pi}{2},1)$ på kurvan
$$\sin(xy^2) + \cos(xy) = 1 \; .$$

7. Bestäm en primitiv funktion (antiderivative) till funktionen
$$f(x) = \frac{x+4}{x^3+4x} \; .$$

VGV

Del 2

8. Lös ekvationen $z^3 - 3(1+i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = 0$.

9. Beräkna, med användande av integration, arean av det minsta av de områden som begränsas av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ och linjen $x = 1$.

10. Visa att funktionen $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ är inverterbar.
    Bestäm definitionsområdet för den inversa funktionen $f^{-1}(x)$
    och beräkna $(f^{-1})'(0)$.

11. Den sk gammafunktionen definieras av $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$.
    Visa att integralen är konvergent för $x > 0$ och att $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.