KTH Matematik

Tentamen i kurserna SF1616 och 5B1130 Matematiska metoder I för S.
Torsdagen den 21 augusti 2008 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Låt A vara matrisen $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$. Avgör om matrisen $A^T A$ är inverterbar.

2. Lös ekvationen $z^2 - (4-2i)z + 7 - 4i = 0$.

3. Bestäm definitionsområdet för funktionen $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ och det största intervall kring origo på vilket funktionen är inverterbar.

4. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(x+1)}{e^x - x - 1}$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}$.

6. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$ är konvergent eller divergent.

7. Avgör om det finns något reellt tal x så att $f(x) = -8$ då $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{3x}$.

VGV

Del 2

8. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$y'' - 6y' + 10y = 39\cos x + 10$.

9. Ekvationen $1 + y + e^{y-2} = 5e^{1-x} - x$ definierar y som en oändligt många gånger deriverbar funktion av x . Bestäm Taylorpolynomet av grad två kring punkten $x = 1$ för denna funktion.

10. Beräkna det kortaste avståndet mellan de två planen
$3x + y + 2z = 6$ och $6x + 2y + 4z = 10$.

11. Till en tank som rymmer 1 liter har det anslutits två rör. Genom det ena strömmar det in vatten i tanken med en tidsberoende hastighet $i(t) = \dfrac{1}{4t^2 + 1}$ liter / sekund , $t > 0$. Genom det andra röret strömmar vatten ut ur tanken med den tidsberoende hastigheten $u(t) = \dfrac{1}{(2t + 1)^2}$ liter / sekund , $t > 0$. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. Bestäm mängden vätska i tanken vid tiden $t > 0$. Avgör också om tanken vid något tillfälle kommer att vara full och i så fall när detta inträffar.