Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 090113.

Linjär algebra

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

Vi ser nu att om a = - 4 saknas lösningar eftersom sista raden är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.
Om $a = 4$ har systemet oändligt många lösningar eftersom sista raden då endast består av nollor och z är en fri variabel.
Om $a \neq \pm 4$ har systemet en lösning eftersom var och en av de tre första kolumnerna har ett ledande element.

2. En riktningsvektor för skärningslinjen ges av kryssprodukten mellan de två planens normalvektorer: $\bar{v} = (3,-1,2)\times(1,0,3) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3,-7,1)$. Punkten $(2, y, 0)$ ligger på planet $x+3z=2$ för alla y. Den ligger även på det andra planet om y = -2 . Det ger att punkten (2,-2,0) ligger på skärningslinjen mellan de två planen. En parameterframställning av skärningslinjen är då $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -2-7t \\ z = t \end{cases}$. Man kan alternativt erhålla detta genom att lösa ekvationssystemet $\begin{cases} 3x - y + 2z = 8 \\ x + \quad\; 3z = 2 \end{cases}$.

3. Insättning av $z = i$ i polynomet ger $-i-(1-3i)-i-4+5-i=0$. Division med $z-i$ ger faktorn $z^2+(1-2i)z+1+5i$. Vi söker nollställena till detta polynom:
Kvadratkomplettering ger $(z+\frac{1}{2}(1-2i))^2 = -\frac{7}{4}-6i$.

Låt $z+\frac{1}{2}(1-2i) = w = x+iy$ (1). Detta ger systemet $\begin{cases} x^2-y^2 = -\frac{7}{4} & (2) \\ 2xy = -6 & (3) \\ x^2+y^2 = |w^2| = \frac{25}{4} & (4) \end{cases}$

$(2)+(4) \Rightarrow 2x^2 = \frac{18}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$ $\quad (4)-(2) \Rightarrow 2y^2 = \frac{32}{4} \Rightarrow y = \pm 2$. (3) ger att x och y har olika tecken dvs $w_1 = \frac{3}{2}-2i$, $w_2 = -\frac{3}{2}+2i)$. (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1 = 1-i \\ z_2 = -2+3i \end{cases}$

4. Skärningspunkten mellan den givna linjen och planet fås:
$-3+2t+2(-3+t)-(-1-t)=2 \Rightarrow t=2$. Det ger skärningspunkten (1,-1,-3). Den sökta linjen är ortogonal mot den givna linjens riktningsvektor (2,1,-1) och mot planets normalvektor (1,2,-1). Som riktningsvektor för den sökta linjen kan vi då ta vektorn $(2,1,-1)\times(1,2,-1)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,3)$. Den sökta linjen ges då av
$(x,y,z)=(1,-1,-3)+t(1,1,3) \quad , \quad -\infty < t < +\infty$.

Envariabelanalys

5. Vi använder l'Hospitals regel två gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}8\cos x=8 .$$

6. Volymen ges av

$$V=\pi\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\cos 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-\frac{\pi}{2}\left(\left[x\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx\right)=\frac{\pi^3}{4}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{4}\,v.e.$$

7. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{(1-x)^2}=\frac{3x^2+2x-1}{x^2(1-x)^2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ där roten x = -1 förkastats. Vi ser att derivatan är negativ till vänster och positiv till höger om $x=\frac{1}{3}$. Det betyder att f har ett lokalt minimum där. Singulära punkter saknas. Vi studerar vad som händer då vi närmar oss ändpunkterna i definitionsområdet:
$\lim_{x\to 0+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=+\infty$. Eftersom $f(\frac{1}{3})=9$ ges då värdemängden av intervallet $f(x)\geq 9$.

8. Implicit derivering map x ger:
$\frac{2y+2xy'+2yy'}{1+(2xy+y^2)^2}-2y'\ln(3x+y)-2y\frac{3+y'}{3x+y}=1+y'$. I punkten (1,-2) ger detta:
$-4+2y'-4y'+4(3+y')=1+y' \Rightarrow y'=-7$. Det ger tangentlinjens ekvation:
$y+2=-7(x-1) \Rightarrow y=-7x+5$.

9. Karakteristisk ekv för det homogena problemet är $r^2+4=0 \Rightarrow r=\pm 2i$. Det ger den allmänna lösningen till homogena ekvationen $y_h(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$.
Vi har "resonans" och ansätter därför $y_p(x)=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$. Vi deriverar

två gånger och får som resultat

$y_p'(x) = (a + 2bx)\cos 2x + (b - 2ax)\sin 2x$, $y_p''(x) = 4(b - ax)\cos 2x - 4(a + bx)\sin 2x$.

Insättning av detta i differentialekvationen ger

$4b\cos 2x - 4a\sin 2x = \sin 2x \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$, $b = 0 \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x$. Den allmänna lösningen är då $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A - \frac{x}{4})\cos 2x + B\sin 2x$. Villkoret $y(0) = 0$ ger $A = 0$ och de sökta lösningarna är $y(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + B\sin 2x$ där B är en godtycklig reell konstant.

10. Potensseriens konvergensradie R ges av

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\sqrt{n}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$ dvs serien är absolutkonvergent

för $|x-2| < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$ och divergent utanför detta intervall. Ändpunkterna studeras:

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ är alternerande. Eftersom talföljden $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ är positiv och monotont avtagande med gränsvärde noll är serien konvergent (betingat) enligt ”Alternating Series Test”.

$x = 5$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ som är en divergent p – serie ($p = \frac{1}{2} < 1$) .

Serien är alltså konvergent för $-1 \le x < 5$.