**Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 090820.**

**Linjär algebra**

1. Om $A$ har invers fås $X = B^T A^{-1}$ . Vi söker inversen på sedvanligt sätt enligt algoritmen $\left[A|I\right] \to \ldots \to \left[I|A^{-1}\right]$. Resultatet är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Detta ger

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 6 \\ 43 & -14 & -17 \end{bmatrix}.$$

2. Kvadratkomplettering ger $(z - \frac{3}{2}(1+i))^2 = 2 - \frac{3}{2}i$ .

Låt $z - \frac{3}{2}(1+i) = w = x + iy \quad (1)$ . Detta ger systemet $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & (2) \\ 2xy = -\frac{3}{2} & (3) \\ x^2 + y^2 = \left|w^2\right| = \frac{5}{2} & (4) \end{cases}$

$(2)+(4) \Rightarrow 2x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2} \qquad (4)-(2) \Rightarrow 2y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$ . (3) ger att $x$ och $y$ har olika tecken dvs $w_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ , $w_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)$ . (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1 = 3 + i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

3. Kalla punkterna $A$ , $B$ resp $C$ och bilda vektorerna mellan $A$ och $B$ resp mellan $A$ och $C : \overline{u} = (3,-1,1)$ och $\overline{v} = (2,0,2)$ . En normalvektor till planet ges då av

$$\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v} = (3,-1,1) \times (2,0,2) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-4,2)$$ . Vi väljer $\overline{n} = (1,2,-1)$ .

Planets ekvation är då $x + 2y - z = D$ . Insättning av tex punkten $A$ ger $D = 4$ dvs planets ekv är $x + 2y - z = 4$ . Linjens riktningsvektor $(3,1,b)$ är ortogonal mot $\overline{n}$ . Det ger $(1,2,-1)\cdot(3,1,b) = 0 \Rightarrow b = 5$ . Punkten $(a, 1, -1)$ på linjen ligger i planet. Det ger $a + 2 + 1 = 4 \Rightarrow a = 1$ .

4. Skärningslinjen fås ur systemet

$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ . $z = t \Rightarrow y = 2 - t \Rightarrow x = -3 + 2t$ . Skärningslinjens ekv på parameterform är alltså $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 \quad - t \\ z = \quad\quad t \end{cases}$. Låt $P$ vara punkten $(1,1,1)$ och $Q$ punkten (-3,2,0) på skärningslinjen. Vi bildar vektorn $\overline{u} = (4,-2,1)$ från $Q$ till $P$. Denna vektor projiceras ortogonalt på skärningsvektorns riktningsvektor $\overline{v} = (2,-1,1)$. Det ger vektorn

$\overline{w} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\overline{v} = \frac{11}{6}(2,-1,1)$. Det sökta avståndet ges nu av

$\|\overline{u} - \overline{w}\| = \frac{1}{6}\|(2,-1,-5)\| = \frac{\sqrt{30}}{6} le$.

## Envariabelanalys

5. Vi använder l'Hospitals regel två gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{e^x - x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{e^x} = 1 .$$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} + 1 \\ dx = 2(u-1)du \end{array} \right\} = 2\int_1^2 \frac{u-1}{u^2} du = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) du = 2\left[ \ln|u| + \frac{1}{u} \right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 .$

7. Vi ser att $D(f)$ ges av $x \geq 0$. Vi söker funktionens minsta värde. Det kommer att antas i en kritisk punkt eftersom $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ och $f(0) = 0$.

$f'(x) = 2x\sqrt{3x} + (x^2 - 5) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x}} = \frac{15(x^2 - 1)}{2\sqrt{3x}} = 0 \Rightarrow x = 1$. Vi ser att $f'(x)$ är negativ till vänster om den kritiska punkten och positiv till höger. Det ger ett minimum för $x =$ 1. Vi får $f(1) = -4\sqrt{3} > -8$ dvs det finns inget $x$ så att $f(x) =$ -8 .

8. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 - 5r + 4r = 0 \Rightarrow r = 1{,}4$. Det ger $y_h(x) = Ae^x + Be^{4x}$. Vi har "resonans" och ansätter därför

$y_p(x) = axe^x \Rightarrow y_p'(x) = a(x+1)e^x \Rightarrow y_p''(x) = a(x+2)e^x$. Insättning i diffekvationen ger $ae^x[x + 2 - 5(x+1) + 4x] = 8e^x \Rightarrow a = -\frac{8}{3} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{8}{3}xe^x$ och den allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A - \frac{8}{3}x)e^x + Be^{4x}$. $y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$. Det ger

$y(x) = (A - \frac{8}{3}x)e^x - Ae^{4x} \Rightarrow y'(x) = -\frac{8}{3}e^x + (A - \frac{8}{3}x)e^x - 4Ae^{4x}$. $y'(0) = 0$ ger nu

$-\frac{8}{3} - 3A = 0 \Rightarrow A = -\frac{8}{9} \Rightarrow B = \frac{8}{9} \Rightarrow y(x) = \frac{8}{9}\left[e^{4x} - (3x+1)e^x\right]$.

9. Implicit derivering map $x$ ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$. Vi ser att $f'(1) = 0$ dvs $x = 1$ är en kritisk punkt till $f$. Vi använder 2:a derivatatestet för att avgöra punktens karaktär och deriverar implicit en gång till :
$y'' = \frac{(2x - y')(x + y^2) - (x^2 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}$. $x = y = 1,\ y' = 0 \Rightarrow f''(1) = 1 > 0$. Det ger att $x = 1$ är en lokal minpunkt.

10. Serien är positiv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ som är en geometrisk serie med kvoten $r = \frac{1}{3}$. Eftersom $|r| < 1$ är den konvergent. Den givna serien är då konvergent enligt majorantprincipen (Comparison Test).