

Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 100115.

Linjär algebra

1. Om A har invers fås $X = A^{-1}B$. Vi söker inversen på sedvanligt sätt enligt

algoritmen $[A|I] \rightarrow \dots \rightarrow [I|A^{-1}]$. Resultatet är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Detta ger

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Kvadratkomplettering ger $(z - (2 - i))^2 = -4$.

Låt $z - 2 + i = w = x + iy$ (1). Detta ger systemet
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (2) \\ 2xy = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 = |w^2| = 4 & (4) \end{cases}$$

(2) + (4) $\Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (4) - (2) $\Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2$. Vi får

$$w_1 = 2i, w_2 = -2i. \quad (1) \text{ ger slutligen } \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

3. Beteckna punkten $(-1, 0, 3)$ med P och välj en pkt Q på linjen, tex $(3, 0, -1)$. Bilda vektorn mellan Q och P : $\vec{u} = (-4, 0, 4)$. Låt projektionen av denna vektor på linjens riktningsvektor vara $\vec{w} = \frac{(-4, 0, 4) \cdot (2, 1, -1)}{\|(2, 1, -1)\|^2} (2, 1, -1) = -2(2, 1, -1)$. Det sökta avståndet ges nu av $\|\vec{u} - \vec{w}\| = \|(0, 2, 2)\| = \sqrt{8} \text{ le}$.

4. Vi bestämmer först rötterna till ekv $z^6 + 64 = 0$. Ekvationen kan skrivas som $z^6 = -64 = 2^6(\cos \pi + i \sin \pi)$. Ur detta fås de sex rötterna

$$z_k = 2(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad \text{Reella rötter saknas}$$

vilket innebär att reella förstgradsfaktorer saknas. Rötterna är parvis komplexkonjugerade (polynomet har ju reella koefficienter):

$z_{0,5} = \sqrt{3} \pm i$, $z_{2,3} = -\sqrt{3} \pm i$, $z_{1,4} = \pm 2i$. Polynomet är produkten av de sex faktorerna $z - z_k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Dessa paras nu ihop så att vi får tre andragsfaktorer med reella koefficienter:

$$(z - z_0)(z - z_5) = (z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i) = (z - \sqrt{3})^2 + 1$$

$$(z - z_2)(z - z_3) = (z + \sqrt{3} - i)(z + \sqrt{3} + i) = (z + \sqrt{3})^2 + 1 \quad \text{Produkten av dessa blir}$$

$$(z - z_1)(z - z_4) = (z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$$

$$x^6 + 64 = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)((x^2 + 2\sqrt{3}x + 4)(x^2 + 4)) .$$

Envariabelanalys

5. Vi använder l'Hospitals regel tre gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3} .$$

6. $f'(x) = e^{-4x} - 4xe^{-4x} = (1 - 4x)e^{-4x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ som är en kritisk punkt. Ändpunkt är $x = 0$. Singulära punkter saknas. Vi ser att derivatan är positiv mellan $x = 0$ och $x = \frac{1}{4}$ och negativ för större x -värden. Förstaderivatet ger då att $x = 0$ är en lokal minpunkt och att $x = \frac{1}{4}$ är en lokal maxpunkt med $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4e}$. Då funktionen är kontinuerlig och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ fås värdemängden $\left[0, \frac{1}{4e}\right]$.

7.
$$\int \frac{x}{(1-x)^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-x \\ du = -dx \end{array} \right\} - \int \frac{1-u}{u^3} du = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{2x-1}{2(x-1)^2} + C .$$

8. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 - 2r + 4 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i\sqrt{3}$. Det ger $y_h(x) = e^x \cdot (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x)$ Vi ansätter som partikulärlösning:

$$y_p(x) = a \cos x + b \sin x \Rightarrow y_p'(x) = -a \sin x + b \cos x \Rightarrow y_p''(x) = -a \cos x - b \sin x .$$

Insättning i differentialekvationen ger:

$$(3a - 2b) \cos x + (2a + 3b) \sin x = 13 \sin x \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = 2 \cos x + 3 \sin x \quad \text{och den}$$

allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) + 2 \cos x + 3 \sin x .$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + 2 = 0 \Rightarrow A = -2 \quad \text{vilket ger}$$

$$y(x) = e^x (-2 \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) + 2 \cos x + 3 \sin x \Rightarrow$$

$$y'(x) = e^x ((B\sqrt{3} - 2) \cos \sqrt{3}x + (B + 2\sqrt{3}) \sin \sqrt{3}x) - 2 \sin x + 3 \cos x . \quad y'(0) = 0 \quad \text{ger nu}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow B\sqrt{3} + 1 = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Slutligen fås resultatet $y(x) = -e^x (2 \cos \sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}x) + 2 \cos x + 3 \sin x .$

9. Vi söker längden av kurvbågen. Den ges av $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2} dx$. Enligt integralkalkylens fundamentalsats gäller $y' = \sqrt{\cos^4(x) \sin^2(x) - 1}$ vilket ger $1+(y')^2 = \cos^4(x) \sin^2(x)$. Kurvbågens längd är alltså $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin(x) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} le$. Det tar alltså 1/3 sekund för myran att passera kurvbågen.

10. Serien är absolutkonvergent om $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos n\pi}{n \ln n} \right|$ är konvergent. $\cos n\pi = (-1)^n$ och

$\ln n > 0$, $n \geq 2$ ger $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. För studiet av denna serie använder vi integral-

kriteriet: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^R \frac{dt}{t} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - \ln(\ln 2)) = \infty$. Då är

även serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergent dvs den givna serien är inte absolutkonvergent. Är den betingat konvergent? Vi använder Leibniz'sats om alternerande serier. Vår serie kan ju skrivas $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. Låt $a_n = \frac{1}{n \ln n}$:

1. $a_n \geq 0$, $n \geq 2$

2. $a_{n+1} \leq a_n$, $n \geq 2$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2. och 3. gäller eftersom $\ln x$ är en växande funktion. Enligt satsen är då den givna serien konvergent. Den måste då vara betingat konvergent enligt ovan.