**Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 100826.**

## Linjär algebra

1. $\det C^T = \det C = \det A^{-1} \det B^2 = \dfrac{1}{\det A} \cdot (\det B)^2 \Rightarrow \det A = \dfrac{(\det B)^2}{\det C} = 9.$

2. Vi visar att systemet som bildas av de tre ekvationerna har oändligt många lösningar vilka ges av en parameter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Detta ger lösningar

$z = t$ , $y = \dfrac{7}{2} + \dfrac{t}{2}$ , $x = -2 - t$ dvs parameterekv för en linje med riktningsvektor (-2,1,2)

3. Vi ser att $z = 1$ är en rot. Division med $z$ -1 ger faktorn $z^2 - iz + 1 + 3i$. Vi löser nu ekv $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$ . Kvadratkomplettering ger $(z - \frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i$ . Med $z - \frac{i}{2} = x + iy$ (1)

fås $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\dfrac{5}{4} & (2) \\ 2xy = -3 & (3) \\ x^2 + y^2 = \dfrac{13}{4} & (4) \quad (x^2 + y^2 = \left|-\dfrac{5}{4} - 3i\right|) \end{cases}$ (2)+(4) ger $2x^2 = \dfrac{8}{4} \Rightarrow x = \pm 1$ . Det ger

enligt (3) : $y = \mp \dfrac{3}{2}$ . (1) ger $z_1 = 1 - \dfrac{3}{2}i + \dfrac{i}{2} = 1 - i$ , $z_2 = -1 + \dfrac{3}{2}i + \dfrac{i}{2} = -1 + 2$ . Rötterna är alltså $z = 1$ , $1 - i$ , $-1 + 2i$ .

4. Låt $ABA^{-1} = C$ . Då gäller att $C^{-1} = (ABA^{-1})^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$ . Inversen till $C$ beräknas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Det betyder att

$$AB^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Envariabelanalys

5. Funktionen är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet. Det säkerställer att $f$ antar ett största och ett minsta värde där vilket måste ske i en kritisk punkt, i en singulär punkt eller i en av intervallets ändpunkter. $f'(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0$ ger den enda kritiska punkten $x = 2$ och den enda singulära punkten $x = 1$. Vi jämför nu funktionens värden i de tre intressanta punkterna: $f(2) = -2$, $f(1) = 0$, $f(5) = 2$. Det minsta värdet är alltså –2 och det största är 2.

6. Det homogena problemet har karakteristisk ekv $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3{,}3$ . Den allmänna lösningen till den homogena ekv är då $y_h(x) = (Ax+B)e^{3x}$ . Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = (ax+b)e^{2x} \Rightarrow y_p{}'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x} \Rightarrow y_p{}''(x) = 4(ax + a + b)e^{2x}$ .
Insättning i diffekvationen ger :

$$[4(ax+a+b) - 6(2ax + a + 2b) + 9(ax+b)]e^{2x} = xe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} a \quad\quad = 1 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} .$$

Det ger $y_p(x) = (x+2)e^{2x} \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax+B)e^{3x} + (x+2)e^{2x}$ .

7. Vi partialbråksuppdelar funktionen och väljer sedan integrationskonstanten till 0 :

$$\frac{2-3x}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \\ C = 3 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$\int \frac{2-3x}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= -3\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x$$

8. Taylorpolynomet ges av $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$ . För att bestämma derivatorna deriverar vi implicit map $x$ två gånger:

$$\begin{cases} 2x + y + xy' + 2yy' - 1 + 2y' = 0 & (1) \\ 2 + y' + y' + xy'' + 2(y'^2 + yy'') + 2y'' = 0 & (2) \end{cases}$$

Insättning av punkten ger $y' = 0$ ur (1) som i (2) ger $y'' = -2$ och vi får $P_2(x) = -1 - (x-1)^2$ .

9. Volymen ges av

$$\pi\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = 2\sin u \\ dx = 2\cos u du \end{array}\right\} = 16\pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$

$$= 16\pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\cos^2 u\,du = 4\pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\,du = 2\pi\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4u)\,du =$$

$$= 2\pi\left[u - \frac{\sin 4u}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi^2\ ve.$$

10. Serien kan skrivas: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n n(n-1)}$ (1). Eftersom den andra av dessa positiva serier är $< \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, som är en konvergent geometrisk serie (kvoten är ½), fås att den givna serien är konvergent enligt majorantsatsen (Comparison Test).

Den första serien i (1) har (geometrisk serie) summan $\frac{1/4}{1-1/2} = \frac{1}{2}$. Den andra serien kan skrivas $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n}$ (2). Vi använder nu att $\ln(1-x) = -\sum_{n=}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $|x|<1$. HL i (2) skrivs på följande sätt: Låt $m = n$ -1 i den första serien. Vi får då

$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1/2)^m}{m} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2}\right) - \left(-\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$. Detta är alltså summan av serien VL i (2). Den givna seriens summa är då enligt (1):

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\ln 2) = \frac{\ln 2}{2}$.