

Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 110113.

Linjär algebra

$$1. \quad AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Determinanten beräknas:}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Det betyder att matrisen saknar invers för varje värde på } a.$$

2. Låt punkterna betecknas A, B resp C . Vi bildar vektorerna från A till B resp från A till C : $(1,1,2) - (2,0,-1) = (-1,1,3)$ och $(3,1,-2) - (2,0,-1) = (1,1,-1)$.

$$\text{En normalvektor till planet ges då av } (-1,1,3) \times (1,1,-1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,-2).$$

Vi väljer $\bar{n} = (2,-1,1)$. Det ger planets ekvation: $2x - y + z = K$. Insättning av valfri punkt ger $K = 3$. Vinkeln θ mellan planets normalvektor och linjen fås ur skalärprodukten mellan \bar{n} och linjens riktningsvektor $\bar{v} = (1,1,2)$:

$$\bar{n} \cdot \bar{v} = \begin{cases} (2,-1,1) \cdot (1,1,2) = 2 - 1 + 2 = 3 \\ \|\bar{n}\| \|\bar{v}\| \cos \theta = \sqrt{6} \sqrt{6} \cos \theta = 6 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Vinkeln}$$

$$\text{mellan planet och linjen är då } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

3. Vi ser att $z = 1$ är en rot. Division med $z - 1$ ger faktorn $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i$. Vi söker nollställena till detta polynom. Kvadratkomplettering ger

$$\left(z - \frac{2+3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{2+3i}{2}\right)^2 - 1 + 3i = 0 \Rightarrow \left(z - \frac{2+3i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

$$w = z - \frac{2+3i}{2} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

Ur detta system fås $x = 0$ ($y = 0$ går ej enligt (1) eftersom x är reellt). (1) ger då att

$$y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow w = \pm \frac{i}{2}. \quad \text{Detta ger slutligen } \begin{cases} z_1 = \frac{2+3i}{2} + \frac{i}{2} = 1 + 2i \\ z_2 = \frac{2+3i}{2} - \frac{i}{2} = 1 + i \end{cases}. \quad \text{De tre rötterna är}$$

$$\text{alltså } z = 1, 1+i, 1+2i.$$

4. Planetens normalvektor $(2,1,-1)$ är riktningsvektor för normallinjen L genom P och Q . Normallinjens vektorekv är då $(x,y,z) = (3,1,-1) + t(2,1,-1)$, $-\infty < t < +\infty$. Att L skär planet i Q ger då $2(3+2t) + 1+t + 1+t = 6 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$. Insättning i linjens vektorekv ger $(x,y,z) = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ som alltså är koordinaterna för Q . Det sökta avståndet ges då av längden av vektorn mellan P och Q dvs av $\left\| (3,1,-1) - (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \right\| = \left\| (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{3} le$.

Envariabelanalys

5. Implicit derivering ger $\frac{1}{2\sqrt{3x+y}}(3+y') + 2x + 4yy' = 0$. Insättning av punkten $(0,1)$

ger $\frac{1}{2}(3+y') + 4y' = 0 \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{3}$. Tangentlinjens ekvation blir alltså

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

6. Lokala extremvärden kan finnas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulara punkter. $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - (x+1)(2x-3)}{x^2(x-3)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2(x-3)^2}$. Vi ser att singulara punkter saknas. Kritiska punkter fås ur $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -3$. Det ger att $x = 1$ är kritisk punkt. Ändpunkter är $x = \frac{1}{2}$ och $x = 2$. Teckenstudium av $f'(x)$ ger att tecknet är positivt mellan $x = \frac{1}{2}$ och $x = 1$ och negativt mellan $x = 1$ och 2 . Det ger enligt förstaderivatatestet att f har lokala minima i ändpunkterna och lokalt maximum i $x = 1$.

$$7. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{\ln R} = 1 - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} = 1.$$

8. Vi partialbråksuppdelar integranden: $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$.

Multiplikation med $(1+x)^2(1+x^2)$ och förenkling ger

$$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1. \text{ Identifikation ger}$$

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ A+B+2C+D &= 0 \\ A+C+2D &= 0 \\ A+B+D &= 1 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=0. \text{ Integralen kan då skrivas som}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2} \right] dx &= \frac{1}{2} \left[\ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + 1) = \\ &= \frac{1}{4} (\ln 2 + 1). \end{aligned}$$

9. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2, -1$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}$.

Vi har "resonans" och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x) = x(ax+b)e^{-x}$.

Detta ger

$$y_p'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b)e^{-x} \Rightarrow$$

$$y_p''(x) = (ax^2 + (-4a+b)x + 2(a-b))e^{-x}.$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{-x} :

$$ax^2 + (b-4a)x + 2(a-b) + 3(-ax^2 + (2a-b)x + b) + 2(ax^2 + bx) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a &= 1 \\ 2a+b &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 1\right)e^{-x}.$$

10. Låt trådens högra fästpunkt vara (a, b) . Trådens längd är $\int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = 1$. Trådens

lutning ges av $y' = \sqrt{e^{2x} - 1} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$. Vi får då ekvationen

$$1 = \int_0^a e^x dx = [e^x]_0^a = e^a - 1 \Rightarrow a = \ln 2. \text{ } y\text{-koordinaten för trådens högra fästpunkt fås:}$$

$$b = y(a) = y(\ln 2) - y(0) = \int_0^{\ln 2} y'(x) dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{e^{2x} - 1} \\ dx = \frac{u}{1+u^2} du \end{array} \right\} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2} du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = [u - \arctan u]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctan \sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Trådens högra fästpunkt har alltså koordinaterna $(\ln 2, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$.