Lösningar till tentamen i kurs SF1616/5B1130 Matematiska metoder I, för S 110825.

Linjär algebra

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & a-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$

Systemet är lösbart endast om $a = 5$. Då fås oändligt många lösningar

$z = t$ ger $y = \dfrac{1+3t}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3-7t}{4}$.

2. Kvadratkomplettering ger $(z-\frac{i}{2})^2 - \frac{i^2}{4} + 1 + 3i = 0 \Rightarrow (z-\frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i$. Vi inför nu

$w = z - \frac{i}{2} = a + ib \Rightarrow \operatorname{Re} w^2 = a^2 - b^2 = -\frac{5}{4}$, $\operatorname{Im} w^2 = 2ab = -3$, $\left|w^2\right| = a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4}$.

Vi får systemet $\begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{5}{4} & (1) \\ 2ab = -3 & (2) \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} & (3) \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} (1)+(3) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ (3)-(1) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{3}{2} \\ (2) \Rightarrow ab < 0 \end{array}$.

Detta ger

$w_1 = 1 - \frac{3}{2}i$, $w_2 = -1 + \frac{3}{2}i \Rightarrow z_1 = 1 - \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = 1 - i$, $z_2 = -1 + \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = -1 + 2i$.

3. Vi opererar med A^{-1} från höger och B^{-1} från vänster och får $X = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. Vi beräknar produktmatrisen och får $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Dess invers beräknas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 17 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & -14 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Matrisen till höger om enhetsmatrisen är vår sökta X.

4. Vi söker skärningslinjens ekv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x,y,z) = (1,-2,0) + t(1,9,4).$$

Låt $P(1,1,1)$ och $Q(1,-2,0)$. Bilda nu vektorn från Q till P: $(0,3,1)$. En normalvektor till planet fås om vi bildar kryssprodukten mellan denna vektor och en riktningsvektor till linjen t ex $(1,9,4)$: $(0,3,1)\times(1,9,4) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (3,1,-3)$. Det sökta planets ekvation ges då av $3x + y - 3z = C$. Insättning av t ex punkten Q ger $C = 1$.

Envariabelanalys

5. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l´Hospitals regel (samma typ fås i varje steg) ger $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = 3.$

6. Vi använder substitution följt av partiell integration :

$$\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{x} \\ 2udu = dx \end{matrix}\right\} = 2\int u^2 \cos u\,du = \{partiellt\} = 2(u^2 \sin u - 2\int u \sin u\,du) =$$

$$= 2u^2 \sin u - 4(-u\cos u + \int \cos u\,du) = 2u^2 \sin u + 4u\cos u - 4\sin u + C =$$

$$= (2x-4)\sin\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

7. Implicit derivering ger $(1+y')e^{xy}+(x+y)e^{xy}(y+xy')=0$. Ur den givna ekvationen fås genom insättning av $x=0$ att $y(0)=1$ vilket ger $1+y'(0)+1=0 \Rightarrow y'(0)=-2$.

8. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2-8r+16=0 \Rightarrow r=4{,}4$.
Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x)=(Ax+B)e^{4x}$.
Vi har "resonans" och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x)=x^2(ax+b)e^{4x}$.
Detta ger

$$y_p{}'(x)=(4ax^3+(3a+4b)x^2+2bx)e^{4x} \Rightarrow$$

$$y_p{}''(x)=(16ax^3+(24a+16b)x^2+(6a+16b)x+2b)e^{4x}.$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{4x}:

$$-16bx^2+6ax=x \Rightarrow a=\frac{1}{6}, \; b=0 \Rightarrow y_p(x)=\frac{1}{6}x^3e^{4x}.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=(Ax+B+\frac{1}{6}x^3)e^{4x}. \quad y(0)=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x)=(A+\frac{1}{2}x^2+4Ax+\frac{2}{3}x^3)e^{4x} \Rightarrow y'(0)=A=1.$$

Den sökta lösningen är alltså $y(x)=(x+\frac{1}{6}x^3)e^{4x}$.

9. f är definierad för $x \geq 0$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{1+x}=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$ är den enda kritiska punkten. Då derivatan är positiv till vänster och negativ till höger om denna punkt är den en lokal maxpunkt. Ändpunkt (och singulär) är $x=0$. Eftersom derivatan är positiv till höger om denna punkt är den en lokal minpunkt.

10.

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^3}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\arctan x}{x^3}=\lim_{R\to\infty}\left(\left[-\frac{\arctan x}{2x^2}\right]_1^R+\frac{1}{2}\int_1^R\frac{dx}{x^2(1+x^2)}\right)=-\frac{1}{2}(0-\frac{\pi}{4})+\lim_{R\to\infty}I_1.$$

För att beräkna integralen I_1 partialbråksuppdelar vi integranden:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{1+x^2}=\{symm \Rightarrow A=C=0\}=\frac{B}{x^2}+\frac{D}{1+x^2} \Rightarrow B(1+x^2)+Dx^2=1.$$

Det ger omedelbart $B=1$ och $D=-1$ ur vilket fås:

$$\frac{1}{2}\int_1^R(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]_1^R=\frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{R}-\arctan R).$$

Den generaliserade integralens värde är då $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}(1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{R}-\arctan R)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$.