**Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 050115**

**Del 1**

1. Avbildningens matris är $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$ dvs $T$ är injektiv. Den inversa avbildningens matris är $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ vilket ger $T^{-1}(w_1, w_2) = (3w_1 - 2w_2, -w_1 + w_2)$.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:
$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = -2,1,1.$$ Egenvektorerna fås:
$$\lambda = -2: \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$ Det ger egenvektorerna
$$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty.$$
$$\lambda = 1: \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$ Det ger egenvektorerna
$$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} t,\ -\infty < s,t < +\infty.$$

3. Kedjeregeln ger
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{u^2}\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow$$
$$u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

4. Låt $D$ vara enhetscirkelskivan. Då fås $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint_D \frac{(1-(x^2+y^2))}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$

Polära koordinater ger nu $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{(1-r^2)}{r} rdr = \frac{4\pi}{3}.$

5. $F_1 = x^2 + y$, $F_2 = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Det ger att fältet är konservativt.

Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan origo och punkten (-1,2) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = -2dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-1} (t^2 - 2t + (t + 4t^2)(-2))dt = -\int_0^{-1} (7t^2 + 4t)dt = \frac{1}{3}.$$

Man kan också använda potentialen $\phi(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy$: $\phi(-1,2) - \phi(0,0) = \frac{1}{3}$.

6. $div\overline{F} = 2x + 2y + 2z$. Enligt Gauss' sats ges då flödet av trippelintegralen över det inneslutna området $R$ : $2\iiint_R (x + y + z)dxdydz = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^y (x + y + z)dz =$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^1 \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^y dy = 2\int_0^1 dx \int_0^1 (xy + \frac{3}{2}y^2)dy = \int_0^1 \left[ xy^2 + y^3 \right]_0^1 dx = \int_0^1 (x + 1)dx = \frac{3}{2}.$$

7. Vi kan uppfatta ytan som nivåytan $F = 0$ till funktionen $F(x, y, z) = e^{xyz} - z^2$.
En normalvektor till ytan ges då av
$\overline{n} = grad(e^{xyz} - z^2) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz} - 2z)$. I punkten $(0,2,1)$ fås $\overline{n} = (2,0,-2)$
vilket ger planets ekvation : $2x - 2z = C$. Insättning av punkten ger $D$ = -2
dvs det sökta tangentplanets ekvation är $x - z + 1 = 0$.

8. Vi bildar lagrangefunktionen $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 6y)$. De sökta värdena antas i kritiska punkter till denna eller i punkter som löser systemet
$\begin{cases} \nabla g = \overline{0} \\ g = 0 \end{cases}$ , $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6y$. Detta system saknar lösning och vi studerar alltså

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L'_y = 4y - 8 + \lambda(2y - 6) = 0 & (2) \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 6y = 0 & (3) \end{cases}$$

Ur (1) fås $x = 0$ eller $\lambda = -1$.
$x = 0$ ger i (3) : $y(y - 6) = 0 \Rightarrow y = 0{,}6$. Det ger punkterna (0,0) och (0,6) .
$\lambda = -1$ ger i (2) : $2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$. Ur (3) fås då $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.
Det ger punkterna $(\pm\sqrt{5},1)$. $f(0,0) = 0$, $f(0,6) = 24$, $f(\pm\sqrt{5},1) = -1$.
Det största värdet är alltså 24 och det minsta är -1 .

**Del 2**

9. Avbildningens matris är $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Linjen har parameterekv $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

Bildmängden ges av $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} t$.

Bilden är alltså linjen $\begin{cases} x = -9 + 8t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$. Genom att eliminera parametern $t$ fås ekvationen $3x - 8y + 3 = 0$.

10. Låt $D$ vara det plana område som ges av $0 \le x + y \le \pi$, $0 \le x - y \le \pi$. Då fås

$$\iiint_R (x-y)\cos z\,dxdydz = \iint_D (x-y)\,dxdy \int_0^{x+y} \cos z\,dz = \iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy.$$

Vi gör nu substitutionen

$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \det\left[\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \det\left[\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right] = -\dfrac{1}{2}$. Det ger integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\,du \int_0^{\pi} v\,dv = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_0^{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

11. Hastigheten $\bar{v}(t) = \int \bar{a}(t)dt = \int (1, \frac{1}{\sqrt{t}})dt = (t + C_1, 2\sqrt{t} + C_2) \Rightarrow \bar{v}(1) = (1 + C_1, 2 + C_2)$.

$\bar{v}(1) = (0,2)$ ger då $C_1 = -1$, $C_2 = 0$. Vi får $\bar{v}(t) = (t - 1, 2\sqrt{t})$. Den sökta båglängden ges då av $\int_1^3 \|\bar{v}(t)\| dt = \int_1^3 \sqrt{(t-1)^2 + 4t}\,dt = \int_1^3 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\,dt = \int_1^3 (t+1)dt = 6\ le$.

12. Vi använder Green's formel : $\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy$ där $D$ är det område som innesluts av kurvan $C$. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -3x^2 - y^2 + 16$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y^2 + 6x^2 - 20$ ger dubbelintegralen $\iint_D (36 - 9x^2 - 4y^2)\,dxdy$. Denna integral blir maximal om integranden är positiv på hela $D$. Det ger $D = \{(x,y) : 9x^2 + 4y^2 \le 36\}$ dvs ellipsskivan $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \le 1$ med randkurvan $C : \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Det maximala värdet ges av

$$\iint\limits_D (36-9x^2-4y^2)\,dxdy = \left\{ \begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow dxdy = 2\cdot 3\cdot rdrd\theta \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 (36-36r^2\cos^2\theta - 36r^2\sin^2\theta)\,6rdr = 36\cdot 12\pi \int\limits_0^1 (1-r^2)\,rdr = 108\pi\,.$$