Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Lördagen den 15 januari 2005 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå betyg 3 krävs minst 18 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,3,…,6) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhållits på någon av de sex första uppgifterna på kursens tidigare tentamina räknas det som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1 eller via sex godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Visa att avbildningen $T:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som ges av $T(x_1,x_2)=(w_1,w_2)$ där
$w_1 = x_1 + 2x_2$
$w_2 = x_1 + 3x_2$
är injektiv (one-to-one). Bestäm också den inversa avbildningen $T^{-1}(w_1,w_2)$.

2. Matrisen
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
har ett egenvärde $\lambda = -2$. Bestäm övriga egenvärden och alla egenvektorer.

3. Låt $z = f(x,y)$ där $x = \dfrac{u}{v}$ och $y = \dfrac{u-v}{u}$ och f är en differentierbar funktion. Visa att $u\dfrac{\partial z}{\partial u} + v\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

4. Beräkna $\displaystyle\iiint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$ där R är det område som ges av $x^2+y^2 \le z \le 1$.

5. Beräkna linjeintegralen $\displaystyle\int_C (x^2+y)\,dx + (x+y^2)\,dy$ där C är den del av kurvan $x^3+y^3+5x-y=0$ som genomlöps från punkten (0,0) till punkten (-1,2) .

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ ut genom den slutna begränsningsytan till det ändliga område som ges av $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y$.

VGV

7. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (0,2,1) till ytan $e^{xyz} - z^2 = 0$.

8. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 8y$ på cirkeln $x^2 + y^2 - 6y = 0$.

Del 2

9. En linjär operator T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ uppfyller att $T(1,0) = (2,1)$ och $T(0,1) = (-3,-1)$. Bestäm bilden av linjen $2x + y - 3 = 0$.

10. Beräkna $\iiint_R (x - y)\cos z \, dxdydz$ där området R ges av olikheterna $0 \leq x + y \leq \pi$, $0 \leq x - y \leq \pi$, $0 \leq z \leq x + y$.

11. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\bar{a}(t) = (1, \frac{1}{\sqrt{t}})$.

    Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\bar{v}(1) = (0,2)$. Hur lång är den bana som partikeln genomlöper under tidsintervallet $1 \leq t \leq 3$?

12. Bestäm den slutna enkla kurvan C så att värdet av linjeintegralen

    $$\oint_C (6x^2 y + y^3 - 20y)\,dx + (16x - x^3 - xy^2)\,dy$$

    blir så stort som möjligt när C genomlöps ett varv moturs. Ange också det maximala värdet.