Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 050603

Del 1

1. Avbildningens matris är $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0.$

   dvs T är ej inverterbar.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ -1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(2-\lambda)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda=1,1,2.\text{ g}$$

Egenvektorerna för det dubbla egenvärdet fås:

$$\lambda=1:\ \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$ Endast en parameter i lösningen ger att egenrummets dimension är 1. Matrisen är ej diagonaliserbar.

3. Ytan är nivåytan $F=3$ till funktionen $F(x,y,z)=x+xy+xyz$. En normalvektor till denna yta ges av $gradF=(1+y+yz,x+xz,xy)$. I punkten $(1,1,1)$ är alltså vektorn $(3,2,1)$ en normal till det sökta tangentplanet vars ekvation då är $3x+2y+z=C$. Insättning av punkten ger $C=6$. Man kan också lösa ut z som funktion av x och y och använda formeln för tangentplanets ekvation till en funktionsyta $z=f(x,y)$.

4. Volymen ges av $\iiint_R dxdydz=\iint_D\left(\int_0^{1-y^2}dz\right)dxdy=\iint_D(1-y^2)dxdy.=\int_0^1(1-y^2)dy\int_0^{1-y}dx=$

   $=\int_0^1(1-y^2)(1-y)\,dy=\int_0^1(1-y-y^2+y^3)\,dy=\frac{5}{12}\ v.e.$ Här är R området vars volym skall beräknas och D en triangel i $xy-$planet med hörn i punkterna $(0,0)$,$(1,0)$ och $(0,1)$.

5. $F_1=x+\frac{y}{2}+3,\ F_2=\frac{x}{2}+y+5 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=0$. Det ger att fältet är konservativt.

   Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan punkterna (-2,0) och (-2,-4) :

$$\begin{cases}x=-2\\ y=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0\\ dy=dt\end{cases}\Rightarrow\int_0^{-4}(-1+t+5)dt=\left[4t+\frac{t^2}{2}\right]_0^{-4}=-8.$$

   Man kan också använda potentialen:

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}xy+3x+5y:\ \phi(-2,-4)-\phi(-2,0)=-8.$$

6. Kedjeregeln ger $\frac{\partial f}{\partial x} = 3g + (3x-2y)g' \cdot 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2g + (3x-2y)g' \cdot a$. Insättning i den givna ekvationen ger $6g + (6x-4y)\cdot g' - 6g + (9x-6y)g' \cdot a = 0$. Det ger $(2+3a)(3x-2y)g' = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$.

7. Området är den del av enhetscirkelskivan som befinner sig till höger om $y-$axeln. Vi studerar först inre punkter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 - 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \quad 2xy = 0 \end{aligned}$$

ger den enda kritiska punkten origo som ej ligger i det inre av området.

Vi studerar nu randpunkterna:

På $y-$axeln : Låt $g(t) = f(0,t) = 0$, $-1 \le t \le 1$.

På cirkelbågen: Låt $h(t) = f(t, \pm\sqrt{1-t^2}) = t(1-t^2) - t^2 = t - t^2 - t^3$, $0 \le t \le 1$.

Ur detta fås $h'(t) = 1 - 2t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$. $h(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$.

”Hörnpunkterna”: $h(0) = 0$, $h(1) = -1$. Sammantaget fås alltså att minsta Värdet är -1 och största värdet är $\frac{5}{27}$.

Del 2

8. Vi diagonaliserar A : Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -(5+\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+5)+18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2{,}1.$$

Egenvektorer söks:

$$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Vi väljer $t = 1$ i båda fallen och får

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Då är $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ur detta fås

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^7 & 0 \\ 0 & 1^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 258 \\ -129 & -258 \end{bmatrix}.$$

9. Vi använder Lagranges multiplikatormetod:
Låt $f(x,y) = xy^2z^3$ och $g(x,y) = x+y+z-30$. Vi bildar Lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-30)$ och söker de kritiska punkterna till denna:

$$\begin{cases} L_1 = y^2z^3 \quad + \lambda = 0 \\ L_2 = 2xyz^3 \quad + \lambda = 0 \\ L_3 = 3xy^2z^2 \quad + \lambda = 0 \\ L_4 = x+y+z-30 = 0 \end{cases}$$

Ur de tre första fås $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2 \Rightarrow y = 2x \ , \ z = 3x$.

Insättning i den sista ekvationen ger $x + 2x + 3x = 30 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 10 \ , \ z = 15$.

10. $$rot\overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + e^{xz} & 2xz + e^{yz} & z \end{vmatrix} = (-2x - ye^{yz}, y + xe^{xz}, z).$$

Den utåtriktade enhetsnormalen till cylinderytan S är $(x, y, 0)$. Flödet ges då av

$$\iint_S (-2x - ye^{yz}, y + xe^{xz}, z) \cdot (x,y,0)\,dS = \iint_S (-2x^2 - xye^{yz} + y^2 + xye^{xz})dS = \{symm\} =$$

$$= \iint_S (-2x^2 + y^2)dS = \{cylinderkoord,\ dS = d\theta dz\} = \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)d\theta \int_0^1 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \pi - 2\pi = -\pi.$$

Enklare är dock att använda divergenssatsen. Vi sluter då ytan med två enhetscirkelskivor vid $z = 0$ (S_1) resp $z = 1$ (S_2). Om det inneslutna området kallas R fås

$\iint_{S+S_1+S_2} rot\overline{F} \cdot \hat{N}dS = \iiint_R divrot\overline{F}dxdydz$. Eftersom $divrot\overline{F} = -2+1+1 = 0$ fås

$\iint_S rot\overline{F} \cdot \hat{N}dS = -\iint_{S_1} rot\overline{F} \cdot \hat{N}dS - \iint_{S_2} rot\overline{F} \cdot \hat{N}dS$. Den första integralen till höger är 0 eftersom normalen på bottenplattan är (0,0,-1) och $z = 0$ på den ytan. På locket är normalen (0,0,1) och z = 1. Det sökta flödet blir alltså $-\iint_{S_2} dS = -\pi$.

11. Symmetri ger att integralen är $2\iiint_{R'} xyzdxdydz$ där R' är tetraedern med spetsen i punkten (0,0,1) och triangeln $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ som basyta. "Taket" är planet $z = 1 - x$ och vi får

$$2\iiint_{R'} xyzdxdydz = 2\iint_D xydxdy \int_0^{1-x} zdz = \iint_D xy\left[z^2\right]_0^{1-x} dxdy = \int_0^1 x(1-x)^2 dx \int_0^x ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx =$$

$$= \ldots = \frac{1}{120}.$$