KTH Matematik

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Fredagen den 3 juni 2005 kl 0800-1300.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhålls på någon av de fem första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng.
Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. En linjär avbildning $T:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av $T(x_1, x_2, x_3) = (w_1, w_2, w_3)$ där

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= x_2 - x_3 \\ w_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Avgör om T är inverterbar.

2. Avgör om matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (1,1,1) till ytan $x + xy + xyz = 3$.

4. Beräkna volymen mellan ytan $z = 1 - y^2$ och xy – planet då $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$.

5. Beräkna linjeintegralen $\int_C (x + \frac{y}{2} + 3)\,dx + (\frac{x}{2} + y + 5)dy$ där C är den kurva som sammansätts av den i övre halvplanet belägna bågen av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ från punkten (-2,0) till punkten (2,0) och räta linjen därifrån till punkten (-2,-4) .

6. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x, y) = (3x - 2y)g(x + ay)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion, uppfyller ekvationen $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

7. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = xy^2 - x^2$ i området $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

VGV

Del 2

8. Låt A vara matrisen $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal. Använd sedan detta för att beräkna matrisen A^7.

9. Låt x, y och z vara tre positiva tal vars summa är 30. För vilka värden på sådana tal blir produkten xy^2z^3 så stor som möjligt?

10. Låt $\overline{F} = (yz + e^{xz}, 2xz + e^{yz}, z)$. Beräkna flödet av vektorfältet $rot\overline{F}$ $(curl\overline{F})$ ut genom den del av cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ för vilken $0 \le z \le 1$.

11. Beräkna trippelintegralen $\iiint_R xyz\,dxdydz$ där R är den pyramid som har spetsen i punkten $(0,0,1)$ och kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ i xy – planet som basyta.