Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 050827

Del 1

1. Det krävs tre linjärt oberoende vektorer. Vi provar med (1,-2,3) , (3,2,1) och (1,0,-1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \end{vmatrix} = -32+16=-16 \neq 0$$

. De valda vektorerna duger alltså.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer. Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)+2=\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=2,3$$

. Egenvektorerna fås:

$$\lambda=2: \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda=3: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Vi väljer $t=1$. En matris som diagonaliserar A är då $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Riktningsderivatan $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$, $\|\bar{u}\|=1$. Vi söker gradientens komponenter:

$$f_1=-4\frac{z}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+2y+3z-5}\ ,\ f_2=-4\frac{z}{(x+y)^2}+\frac{2}{x+2y+3z-5}\ ,\ f_3=\frac{4}{(x+y)}+\frac{3}{x+2y+3z-5}$$

I punkten (1,1,1) fås $\nabla f=(0,1,5)$. $\bar{u}=\frac{(1,2,2)}{3} \Rightarrow D_{\bar{u}} f=(0,1,5)\cdot\frac{(1,2,2)}{3}=4$.

4. Vi använder Maclaurinutveckling för att snabbast komma åt derivatorna av ordning 1 och 2: $\ln(1+t)=t+O(t^2) \Rightarrow p_2(x,y)=xy+x^2+y^2$. Detta är funktionens Maclaurinpolynom. Vi utläser av detta att $f_1(0,0)=f_2(0,0)=0$ dvs origo är en kritisk punkt. Vi utläser också att $f_{11}(0,0)=f_{22}(0,0)=2$, $f_{12}(0,0)=1$. Andraderivatatestet ger då: $2\cdot 2-1^2=3>0$. Eftersom $f_{11}(0,0)>0$ är origo ett lokalt minimum.

5. Flödet ges av $\iint_S (y,-x,z)\cdot\hat{N}dS$ där S är paraboloidytan och $\hat{N}$ är ytans uppåtriktade normalvektor. Det gäller att $\hat{N}dS=\pm(-f_1,-f_2,1)dxdy$ där $f(x,y)=4-x^2-y^2$. Vi skall välja + och får $\hat{N}dS=(2x,2y,1)dxdy$. Det ger integralen

$$\iint_S (y,-x,z)\cdot\hat{N}dS = \iint_D (y,-x,4-x^2-y^2)\cdot(2x,2y,1)dxdy = \iint_D (4-(x^2+y^2))dxdy \quad \text{där}$$

D är projektionen av S på $xy-$planet dvs en cirkelsektor med radien 2 och öppningsvinkel 45 grader i 1:a kvadranten. Med polära koordinater blir integralen

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 (4-r^2)rdr = \frac{\pi}{4}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \pi \ .$$

6. Låt $f(x,y) = y^2 - x$ och låt D vara det givna området i $xy-$planet. Då gäller att arean ges av

$$\iint_D \sqrt{f_1^{\,2} + f_1^{\,2} + 1}\,dxdy. \quad f_1 = -1\ , \ f_2 = 2y \Rightarrow \iint_D \sqrt{2+4y^2}\,dxdy = \sqrt{2}\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1+2y^2}} \sqrt{1+2y^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (1+2y^2)dy = \sqrt{2}\left[y + \frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{2}}{3} \ ae \ .$$

7. Vektorfältet är konservativt om $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2+y^2}{y}) = \frac{\partial}{\partial x}(kx\ln y) \Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{kx}{y} \Rightarrow k = 2$. Då fältet är konservativt kan vi byta väg mellan punkterna. Enklast är att välja den räta linjen

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} . \text{ Integralen blir då } \int_0^{\pi} 2t\ln 2dt = 2\ln 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi^2 \ln 2 \ .$$

Del 2

8. A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk. Det ger $a = 2$. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,1,10.$$

Egenvektorerna söks:

$$\lambda = 1:\begin{bmatrix}4&4&2&0\\4&4&2&0\\2&2&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1 = -s-\dfrac{t}{2}\\ x_2 = s\\ x_3 = t\end{cases}\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}t\,.$$

Alla vektorer i det plan som spänns av de två vektorerna är egenvektorer med egenvärde 1 .

Vi konstruerar en vektor i detta plan som är ortogonal mot (-1,1,0) med hjälp av ortogonal projektion: $(-1,0,2)-\dfrac{(-1,0,2)\cdot(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0)=\dfrac{1}{2}(-1,-1,4)$. Som de två första kolumnerna i matrisen P kan vi då välja $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ och $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

$$\lambda = 10:\begin{bmatrix}-5&4&2&0\\4&-5&2&0\\2&2&-8&0\end{bmatrix}\rightarrow\ldots\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-4&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1 = 2t\\ x_2 = 2t\\ x_3 = t\end{cases}\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}t\,.$$

Det ger matrisen $P=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-3&-1&2\sqrt{2}\\3&-1&2\sqrt{2}\\0&4&\sqrt{2}\end{bmatrix}$. Motsvarande diagonalmatris är

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{bmatrix}.$$

9. Vi undersöker om vektorfältet är konservativt:

$$rot\bar{F} = \begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^{-x}z^2 & 2y\sin z & y^2\cos z-2e^{-x}z\end{vmatrix} = (2y\cos z-2y\cos z,\ 2e^{-x}z-2e^{-x}z,\ 0)=\bar{0}\,.$$

Det betyder att fältet är konservativt och alltså har en potential som vi nu söker:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = e^{-x}z^2 & (1)\Rightarrow \phi = -e^{-x}z^2+f(y,z)\Rightarrow\{(2)\}\Rightarrow 2y\sin z = f_1 \Rightarrow f = y^2\sin z+g(z)\Rightarrow\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2y\sin z & (2)\qquad \phi = -e^{-x}z^2+y^2\sin z+g(z)\Rightarrow\{(3)\}\Rightarrow g'(z)=0\Rightarrow g = konst\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = y^2\cos z-2e^{-x}z & (3)\qquad \phi = -e^{-x}z^2+y^2\sin z+konst\end{cases}$$

$\bar{r}(0)=(1,0,0)$, $\bar{r}(\dfrac{\pi}{2})=(0,0,1)$ ger nu linjeintegralens värde $\phi(0,0,1)-\phi(1,0,0)=-1$.

10. Vi byter variabler. Låt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x+z \\ w = y+z \end{cases}$. Integralen blir då

$$\iiint_{R'} \frac{u}{vw}\left|\det\left[\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right]\right| dudvdw$$ där området R' ges av olikheterna

$0 \le u \le 2$, $1 \le v \le 2$, $1 \le w \le 2$ och $\det\left[\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right] = \frac{1}{\det\left[\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right]}$.

$\det\left[\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ vilket ger integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^2 udu \int_1^2 \frac{dv}{v}\int_1^2 \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 \left(\left[\ln|v|\right]_1^2\right)^2 = (\ln 2)^2 \ .$$

11. Vi använder Lagranges multiplikatormetod. Vi skall extremera avståndsfunktionen $\sqrt{x^2+y^2}$ under bivillkoret $x^4+y^4+z^4-1=0$. Av beräkningstekniska skäl extremerar vi istället kvadraten på avståndsfunktionen och bildar Lagrangefunktionen $L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^4+y^4+z^4-1)$. Vi söker dess kritiska punkter:

$$\begin{cases} L_1 = 2x+4\lambda x^3 = 0 & (1) \\ L_2 = 2y+4\lambda y^3 = 0 & (2) \\ L_3 = 2y+4\lambda y^3 = 0 & (3) \\ L_4 = x^4+y^4+z^4-1=0 & (4) \end{cases}$$ Ur (1) fås $x=0$ eller $\lambda = -\frac{1}{2x^2}$, $x \ne 0$

Motsvarande fås ur (2) och (3) för variablerna y och z . Det ger tre intressanta fall: 1) x , y , z är alla skilda från 0 2) Två av dessa variabler är skilda från 0 och den tredje är 0 3) En av dessa variabler är skild från 0 och de två övriga är 0 . Symmetri ger att inte spelar någon roll vilka som är 0 och vilka som är skilda från 0 . Alla möjliga sådana punkter inom ett visst av ovanstående fall ger samma avstånd.

1) $\lambda = -\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2z^2} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$. (4) ger då $3x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Det ger avståndet $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}} = 3^{1/4}$.

2) Låt tex $z=0$. Då gäller $x^2 = y^2$. (4) ger då $2x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Det ger avståndet $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 2^{1/4}$.

3) Låt tex $y=z=0$. (4) ger då $x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. Det ger avståndet 1.

Alltså är det största avståndet $3^{1/4}$ och det minsta är 1 .