Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Lördagen den 27 augusti 2005 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhålls på någon av de fem första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng.
Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Välj av följande vektorer ut en mängd som duger som bas i $\mathbf{R}^3$:
   (1,-2,3) , (5,6,-1) , (3,2,1) , (1,0,-1) , (2,1,2) .

2. Låt $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris P och en diagonal matris D sådana att $P^{-1}AP=D$.

3. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z)=\dfrac{4z}{x+y}+\ln(x+2y+3z-5)$ i punkten (1,1,1) i den riktning som ges av vektorn (1,2,2).

4. Avgör om origo är en lokal maxpunkt, lokal minpunkt eller ingetdera till funktionen $f(x,y)=xy+\ln(1+x^2+y^2)$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $(y,-x,z)$ upp genom den del av paraboloiden $z=4-x^2-y^2$ för vilken $0\le y\le x$, $z\ge 0$.

6. Beräkna arean av den del av ytan $z=y^2-x$ för vilken $0\le x\le \sqrt{1+2y^2}$, $0\le y\le 1$.

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C kx\ln y\,dx+\dfrac{x^2+y^2}{y}dy$ för det värde på k som gör vektorfältet konservativt. C är kurvbågen $y=1+\cos^2 x$ från punkten (0,2) till punkten $(\pi,2)$.

VGV

Del 2

8. Bestäm konstanten a så att matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & a \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ blir ortogonalt diagonaliserbar. Bestäm även en ortogonal matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

9. Beräkna linjeintegralen $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ där vektorfältet
   $\overline{F} = (e^{-x}z^2, 2y\sin z, y^2\cos z - 2e^{-x}z)$ och C är kurvan
   $\overline{r}(t) = (\cos t, \sin 2t, \sin^2 t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

10. Beräkna trippelintegralen $\iiint_R \dfrac{x+y}{(x+z)(y+z)}\,dxdydz$ där området R ges av olikheterna $0 \le x+y \le 2$, $1 \le x+z \le 2$, $1 \le y+z \le 2$.

11. Bestäm det största och det minsta avståndet från origo till en punkt på ytan
    $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.