Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 060117

Del 1

1. Mängden duger som bas om och endast om följande determinant är skild från 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 \neq 0$$ för alla reella a. $S_1 = \{(1,-1,1),(1,1,1),(0,1,1)\}$. Vi söker koefficienter a, b, c så att $(1,4,2) = a(1,-11) + b(1,1,1) + c(0,1,1)$. Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \ \ 2 \\ c = \ \ 1 \end{cases}$$

2. Låt A vara T:s standardmatris.Dess kolumner är $T\,(1,0)$ och $T\,(0,1)$ resp.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer. Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+5)+18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2{,}1 .$$

Egenvektorerna fås:

$$\lambda = -2: \ \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 1: \ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Där t är ett reellt tal.

3. Vi använder kedjeregeln. Låt $t = x + 2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g + x\frac{\partial g}{\partial x} = g + x\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = g + x\frac{dg}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(g + x\frac{dg}{dt}) = \frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} + x\frac{d^2 g}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y} =$$

$$= 2\frac{dg}{dt} + 2x\frac{d^2 g}{dt^2} . \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = 2x\frac{dg}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x\frac{dg}{dt}) = 2x\frac{d^2 g}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y} = 4x\frac{d^2 g}{dt^2}$$

Detta ger att den givna ekvationens vänsterled blir

$$2\frac{dg}{dt} + x\frac{d^2 g}{dt^2} - (2\frac{dg}{dt} + 2x\frac{d^2 g}{dt^2}) + x\frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$ och beviset är klart.

4. Området är slutet och begränsat och f är kontinuerlig där vilket betyder att ett största och ett minsta värde antas. Det måste ske i en inre punkt eller i en randpunkt. Eftersom $\nabla f = (2,1) \neq (0,0)$ saknas inre kritiska punkter och det måste ske i en randpunkt.
Randen $y = 4$: $g(x) = f(x,4) = 2x + 4$, $-2 \le x \le 2$. Denna funktion är växande.
Randen $y = x^2$: $g(x) = f(x,x^2) = 2x + x^2$, $-2 \le x \le 2$. $g'(x) = 2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$.
Denna kritiska punkt ger f= -1 . Vi måste också beakta punkterna där $x = \pm 2$. Det ger f= 0 och f= 8 . Resultatet är alltså att det största värdet är 8 och det minsta är -1 .

5. Enklast är att använda Greens formel vilket ger att linjeintegralen har samma värde som $\iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy))\,dxdy = \iint_D (1 - x)\,dxdy$ där D är den givna triangeln. Vi observerar att $\iint_D x\,dxdy = 0$ pga området är symmetriskt kring $y-$axeln och att x är udda.
Det som återstår av dubbelintegralen är då $\iint_D dxdy =$ arean(D) = 1 .

6. Låt $F(x,y,z) = \sin(x + y - 2z) + x + 2y + 6z - 9$. Ytan är då nivåytan $F = 0$ och en normalvektor ges av $\nabla F = (\cos(x + y - 2z) + 1, \cos(x + y - 2z) + 2, -2\cos(x + y - 2z) + 6)$.
En normalvektor till tangentplanet i punkten $(1,1,1)$ är då $(2,3,4)$ och en ekvation för tangentplanet i denna punkt är $2x + 3y + 4z = C$. Insättning av tangeringspunkten ger $C = 1$.

7. Flödet ges av $\iint_S (z, y, \frac{1}{1 + x^2}) \cdot \hat{N}dS$ där S är den givna delen av planet $z = x + 1$ och
$\hat{N}dS = \pm(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\,dxdy$. Uppåtriktad normal betyder att vi väljer + och får
$\hat{N}dS = (-1,0,1)\,dxdy$. Låt D vara rektangeln som ges av $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le 1$. Flödet blir då

$$\iint_D (x + 1, y, \frac{1}{1 + x^2}) \cdot (-1,0,1)\,dxdy = \iint_D (-x - 1 + \frac{1}{1 + x^2})dxdy = \int_0^{\pi/4} (-x - 1 + \frac{1}{1 + x^2})dx \int_0^1 dy =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x + \arctan x \right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} .$$

Del 2

8. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x} + K\bar{x} - 75 = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ och $K = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A. Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-16) - 144 = \lambda(\lambda-25) = 0 \Rightarrow \lambda = 0{,}25 .$$

Normerade egenvektorer söks:

$$\lambda = 0: \quad \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 25: \quad \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') - 75 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' - 75 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 75 = 0 \Rightarrow (x')^2 + 2x' + 2y' - 3 = 0$. Kvadratkomplettering ger $(x'+1)^2 + 2(y'-2) = 0$. Med koordinatbytet $\begin{cases} x'' = x'+1 \\ y'' = y'-2 \end{cases}$ som är en translation fås slutligen $(x'')^2 + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$ dvs kurvan är en parabel.

9. Divergenssatsen : $\oiint_S \bar{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K div\bar{F} dxdydz$ där K är det inneslutna området.

$div(xy+z, y-y^2, x+yz) = y + 1 - 2y + y = 1$. Det gör att flödet ges av K:s volym V.

Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$ Kurvans projektion på $xy-$planet fås genom att eliminera z ur systemet vilket ger $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 + y^2$ dvs en cirkel med ekvationen $x^2 + y^2 = 4$. Låt D vara området innanför denna cirkel. Då gäller att $V = \iint_D (8 - x^2 + y^2 - (x^2 + 3y^2))dxdy = 2\iint_D (4 - (x^2 + y^2))\,dxdy$. Polära koordinater ger

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r\,dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi .$$

10. Vi byter variabler. Låt $\begin{cases} u = x - y \\ v = xy \end{cases}$. Det gäller att $dxdy = \left|\det\left[\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right]\right| dudv$ där

$$\det\left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right] = \frac{1}{\det\left[\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right]} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x+y}.$$ $x > 0 \Rightarrow y > 0$ dvs absolutbeloppet gör ingen skillnad här. Låt D' vara rektangelområdet $0 \le u \le 1$, $1 \le v \le 2$. Vi ser att $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = u(x+y)$ och $x^2 + y^2 = u^2 + 2v$. Integralen blir då

$$\iint_{D'} ue^{u^2+2v}dudv = \int_0^1 ue^{u^2}du \int_1^2 e^{2v}dv = \left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}e^{2v}\right]_1^2 = \frac{e^2}{4}(e-1)(e^2-1).$$

11. Ytan $z_1 = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger helt på ena sidan om planet $z_2 = x + 2y - 13$ om och endast om $z_2 - z_1$ har konstant tecken. Vi bildar då funktionen $f(x,y) = z_2 - z_1 = 3x + y - 13 - \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ som är definierad för $20 - 3x^2 - y^2 \ge 0$ och söker största och minsta värdet för den i ellipsskivan $3x^2 + y^2 \le 20$. Sådana värden antas eftersom f är kontinuerlig och ellipsskivan en sluten och begränsad mängd. Det sker i inre punkter eller i randpunkter. Vi studerar först inre kritiska punkter: De fås ur systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \Rightarrow y = -\sqrt{20 - 4y^2} \Rightarrow y = -2$$ .Det ger punkten (-2,-2) där f är negativ. På ellipsskivans rand är $f(x,y) = 3x + y - 13$ och vi kan använda Lagranges multiplikatormetod. Med $L(x,y,\lambda) = 3x + y - 13 + \lambda(3x^2 + y^2 - 20)$ fås

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + 6\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x^2 + y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$ Ur de båda första ekvationerna får vi $x = y$ som i den sista ger

$4x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$. $f(-\sqrt{5},-\sqrt{5}) < 0$, $f(\sqrt{5},\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 13 < 4 \cdot 3 - 13 < 0$.
Vi ser alltså att funktionens största och minsta värden är negativa vilket visar att ytan z_1 ligger helt på ena sidan om planet.