Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Tisdagen den 17 januari 2006 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Låt $S_a = \{(1,-1,a),(1,a,1),(0,a,1)\}$. Visa att S_a duger som bas i $\mathbf{R}^3$ för alla värden på det reella talet a. Bestäm också koordinaterna för vektorn (1,4,2) relativt basen S_1.

2. För den linjära avbildningen T gäller att $T(1,0)=(4,-3)$ och $T(0,1)=(6,-5)$. Bestäm avbildningens egenvärden och egenvektorer.

3. Låt $z = f(x,y) = xg(x+2y)$ där g är en två gånger deriverbar funktion.
Visa att $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 2x + y$ i området som ges av $x^2 \le y \le 4$.

5. Beräkna linjeintegralen $\oint_C (x^2 + xy)\,dx + (x - y^2)\,dy$ där C är den positivt orienterade randkurvan till triangeln med hörn i punkterna (-1,0) , (1,0) och (0,1) .

6. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (1,1,1) till ytan $\sin(x + y - 2z) + x + 2y + 6z - 9 = 0$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (z, y, \dfrac{1}{1+x^2})$ upp genom den del av planet $z = x + 1$ som ges av $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ och $0 \le y \le 1$.

VGV

Del 2

8. Avgör vilken typ av kägelsnitt (conic) som beskrivs av ekvationen $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 10x + 70y - 75 = 0$. Rotera och translatera koordinatsystemet så att kurvan hamnar på huvudaxelform (standard position). Ange formlerna för de koordinatbyten som görs samt kurvans ekvation i det slutliga koordinatsystemet.

9. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (xy + z, y - y^2, x + yz)$ ut genom det slutna område som begränsas av ytorna $z = 8 - (x^2 - y^2)$ och $z = x^2 + 3y^2$.

10. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2 - y^2)e^{x^2+y^2}\,dxdy$ där området D ges av olikheterna $0 \le x - y \le 1$, $1 \le xy \le 2$, $x > 0$.

11. Avgör om ytan $z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger helt på ena sidan om planet $z = x + 2y - 13$.