Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 060530.

Del 1

1. $(\overline{v})_B = (3,2) \Rightarrow \overline{v} = 3\overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 = 3(5,7) + 2(5,6) = (25,33)$. Vi söker a och b så att $(25,33) = a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2 = a(1,1) + b(2,3) = (a+2b, a+3b)$. Det ger systemet
$$\begin{cases} a + 2b = 25 \ \ (1) \\ a + 3b = 33 \ \ (2) \end{cases} \quad (2)-(1) \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 9 \quad \text{dvs} \quad [\overline{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

2. Låt A vara T:s standardmatris. Dess kolumner är $T(1,0)$ och $T(0,1)$. $T(1,0) = 2(1,0)$ och $T(1,1) = 17(1,1)$. Den första kolumnen är alltså $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Den andra fås:
$T(1,1) = T(1,0) + T(0,1) \Rightarrow T(01) = T(1,1) - T(1,0) = 17(1,1) - 2(1,0) = (15,17)$. Det ger $A = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.

3. Vi använder kedjeregeln. $z = f(3x+4y, xy) \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 3\dfrac{\partial f}{\partial u} + y\dfrac{\partial f}{\partial v}$ och
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 4\dfrac{\partial f}{\partial u} + x\dfrac{\partial f}{\partial v}$. Detta ger
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3x\frac{\partial f}{\partial u} + xy\frac{\partial f}{\partial v} + 4y\frac{\partial f}{\partial u} + xy\frac{\partial f}{\partial v} = (3x+4y)\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v} = u\frac{\partial f}{\partial u} + 2v\frac{\partial f}{\partial v}.$$

4. De kritiska punkterna fås ur systemet
$$\begin{cases} f_1 = 1 + 3x^2 + 2y = 0 \ \ (1) \\ f_2 = -2 + 2x - 4y = 0 \ \ (2) \end{cases} \quad 2(1) + (2) \Rightarrow 6x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, -\frac{1}{3}.$$ Insättning i (2) ger punkterna $(0, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Vi undersöker karaktären:
$A = f_{11} = 6x,\ B = f_{12} = 2,\ C = f_{22} = -4 \Rightarrow D = AC - B^2 = -24x - 4$.
$(0, -\frac{1}{2})$: $D = -4 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt $\quad (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$: $D = 4 > 0$, $A = -2 < 0 \Rightarrow$ max.

5. Flödet ges av $I = \iint_S (4x, 6y, z) \cdot \hat{N} dS$ där S är den givna ytan.
$dS = \pm(-g_1, -g_2, 1)dxdy$ där $g(x,y) = xy^2$ där + tecknet skall väljas. Det ger $\hat{N}dS = (-y^2, -2xy, 1)dxdy$. Låt D vara ytans projektion på xy – planet. Vi får då
$$I = \iint_D (4x, 6y, xy^2) \cdot (-y^2, -2xy, 1)\, dxdy = \iint_D (-4xy^2 - 12xy^2 + xy^2) dxdy =$$

$$= -15\iint_D xy^2\,dxdy = -15\int_0^1 x dx\int_0^{x^2} y^2 dy = -15\int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} = -5\int_0^1 x^7 dx = -\frac{5}{8}\ .$$

6. $$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+3xy}}\,dxdy = \int_0^1 x^2 dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+3xy}} = \int_0^1 x^2 dx\left[\frac{2}{3x}\sqrt{1+3xy}\right]_0^x = \frac{2}{3}\int_0^1 x(\sqrt{1+3x^2}-1)dx =$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{9}(1+3x^2)^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{27}\ .$$

7. Vi använder Green´s formel och får att linjeintegralen kan ersättas med dubbelintegralen $\iint_D (\frac{\partial}{\partial x}\cos(3y) - \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2))dxdy = -\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2}dxdy$ där området D innanför den slutna kurvan C är den del av cirkelringen $1 \le x^2+y^2 \le 4$ som ligger ovanför linjen $y = x$. Vi inför polära koordinater och får
$$-2\int_1^2 \frac{r}{r^2} rdr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin\theta\, d\theta = -2[r]_1^2[-\cos\theta]_{\pi/4}^{5\pi/4} = -2\sqrt{2}\ .$$

Del 2

8. Arean ges av $\iint_S dS$ där S är det givna ytstycket. Vid projektion på området D i $xy-$planet gäller $dS = \sqrt{(g_1)^2 + (g_2)^2 + 1}\,dxdy$ där $g(x,y) = \dfrac{x^2}{2(1-y)}$. Vi får
$$dS = \sqrt{\frac{x^2}{(1-y)^2} + \frac{x^4}{4(1-y)^4} + 1}\,dxdy = \sqrt{(\frac{x^2}{2(1-y)^2}+1)^2}\,dxdy = (\frac{x^2}{2(1-y)^2}+1)\,dxdy\ .$$
Det ger arean $\displaystyle\iint_D (\frac{x^2}{2(1-y)^2}+1)dxdy = \int_{1/2}^1 dx\int_{1-x}^{1/2} (\frac{x^2}{2(1-y)^2}+1)dy =$
$$= \int_{1/2}^1 \left[\frac{x^2}{2(1-y)} + y\right]_{1-x}^{1/2} dx = \int_{1/2}^1 (x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + x - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_{1/2}^1 = \frac{11}{48} ae\ .$$

9. Vi inför nya variabler: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x + z \\ w = y + z \end{cases}$ $0 \le u \le 2$, $1 \le v \le 2$, $1 \le w \le 2$. Funktional-

determinanten $\det \dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \left| \det \dfrac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| = \dfrac{1}{2}$. Trippel-

integralen blir då $\dfrac{1}{2}\int_0^2 u\,du \int_1^2 \dfrac{dv}{v} \int_1^2 \dfrac{dw}{w} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{u^2}{2}\right]_0^2 (\left[\ln v\right]_1^2)^2 = (\ln 2)^2$.

10. Vi observerar att funktionens definitionsområde är ellipsskivan $4x^2 + y^2 \le 4$. Vi skall undersöka inre punkter och randpunkter.

Inre punkter: $\begin{cases} f_1 = y - \dfrac{4x}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \quad (1) \\ f_2 = x - \dfrac{y}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \quad (2) \end{cases}$ $y \cdot (1) - 4x \cdot (2) \Rightarrow y^2 - 4x^2 = 0$. Vi får

$y = \pm 2x$. Detta insatt i (1) ger $2x(\pm 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}) = 0$ där endast + tecknet är möjligt.

Vi får $x = 0$ och $\sqrt{1-2x^2} = 1 \Rightarrow x = 0$. Det ger att origo är den enda kritiska punkten.

Randpunkter: På randen gäller $f(x,y) = xy$ och $y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$. Ur detta fås $g(x) = f(x, \pm 2\sqrt{1-x^2}) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Vi undersöker nu denna funktions största och minsta värde: $g'(x) = \pm 2(\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}) = \pm 2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Det ger de kritiska punkterna $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$.

Ändpunkterna i definitionsområdet till g är $x = -1$ och $x = 1$. Det ger punkterna (-1,0) och (1,0) . Beräkning av funktionsvärdena i alla intressanta punkter ger värdena f = -1 , 0 , 1 och 2 . Det minsta värdet är alltså -1 och det största är 2 .

11. Om vi hade $A = B^2$ skulle $\det A = \det B^2 = (\det B)^2 \ge 0$. Men $\det A = -8$. Alltså kan inte en sådan matris B finnas. För att finna matrisen C diagonaliserar vi A :

$\begin{vmatrix} \lambda - 19 & -18 \\ 27 & \lambda + 26 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -8, 1$. Vi beräknar egenvektorerna:

$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -18 & -18 & 0 \\ 27 & 27 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$, $t \ne 0$.

$\lambda = -8: \begin{bmatrix} -27 & -18 & 0 \\ 27 & 18 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t$, $t \neq 0$. Med $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ fås att

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^3$. Detta ger nu att

$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^3 P^{-1} = (P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1})^3 \Rightarrow C = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}$.