Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Tisdagen den 30 maj 2006 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3p erhålls på någon av de fem första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng.
Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ och $B' = \{\overline{u}_1', \overline{u}_2'\}$ är två baser i $\mathbf{R}^2$ där $\overline{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\overline{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\overline{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overline{u}_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vektorn $\overline{v}$ har koordinatmatrisen $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ i basen B. Bestäm koordinatmatrisen för $\overline{v}$ i basen B'.

2. För den linjära avbildningen T gäller att $(1,0)$ och $(1,1)$ är egenvektorer svarande mot egenvärdena 2 respektive 17. Bestäm standardmatrisen för T och ange en matris som diagonaliserar denna.

3. Låt $z = f(u,v)$ där $u = 3x + 4y$, $v = xy$ och f är en differentierbar funktion. Bestäm $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Svaret får inte innehålla x och y.

4. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = x - 2y + x^3 + 2xy - 2y^2$ och avgör deras karaktär.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (4x, 6y, z)$ genom ytan $z = xy^2$, $0 \le y \le x^2$, $0 \le x \le 1$. Ytans enhetsnormalvektor $\hat{N}$ uppfyller att $\hat{N} \cdot \overline{k} > 0$.

6. Beräkna $\iint_D \dfrac{x^2}{\sqrt{1+3xy}}\,dxdy$ där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

7. Beräkna $\oint_C \ln(x^2+y^2)\,dx + \cos(3y)\,dy$ där C är den positivt orienterade randkurvan till det ändliga området $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge x$.

Del 2

8. Beräkna arean av den del av ytan $z = \dfrac{x^2}{2(1-y)}$ för vilken $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$, $1-x \le y \le \dfrac{1}{2}$.

9. Beräkna $\iiint_K \dfrac{x+y}{(x+z)(y+z)}\,dxdydz$ där K är området $0 \le x+y \le 2$, $1 \le x+z \le 2$, $1 \le y+z \le 2$.

10. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy + \sqrt{4-(4x^2+y^2)}$.

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ -27 & -26 \end{bmatrix}$. Visa att det inte finns någon reell matris B sådan att $B^2 = A$ och finn en matris C sådan att $C^3 = A$.