Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 060821.

Del 1

1. $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1) \Rightarrow T(\bar{e}_1) = (1,1,1)$, $T(\bar{e}_2) = (0,2,-1)$, $T(\bar{e}_3) = (0,-3,0)$.

Avbildningens matris är då $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$

T är inverterbar.

2. Vi söker matrisens egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,2,2 .$$

Egenvektorerna för det dubbla egenvärdet söks:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Vi ser direkt att det blir en parameter i lösningen vilket ger att egenrummets dimension är ett. Då kan vi inte välja tre linjärt oberoende egenvektorer vilket gör att matrisen inte är diagonaliserbar.

3. Vi provar att gå in mot origo längs $x-$axeln:

$y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Vi går in längs linjen $y = x$:

$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2.$ Eftersom dessa två vägar in mot origo ger olika resultat existerar inte gränsvärdet.

4. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt i det inre av området eller i en randpunkt eftersom singulära punkter saknas.

$\begin{cases} f_1 = 6x^2 - y^2 = 0 \\ f_2 = -2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$. Enda intressanta punkten i det inre är alltså origo.

Randen: $y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow h(x) = 2x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x$, $-3 \le x \le 3$. Vi söker kritiska punkter: $h'(x) = 9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Detta svarar mot punkterna $(1,\pm\sqrt{8})$, $(-1,\pm\sqrt{8})$. Intressanta är också ändpunkterna i definitionsområdet till h.
Funktionsvärdena i ovan nämnda punkter är 0 , -6 , 6 , -54 , 54 .
Det största värdet är alltså 54 och det minsta -54.

5. Kurvan C består av två delar som kan parametriseras enligt
$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$ $t: 0 \to 2$ resp $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2tdt \end{cases}$ $t: 2 \to -2$. Detta ger
$$\int_0^2 (t^3 + 2t^3)dt + \int_2^{-2} (t(t^2-2)^2 + 2t^2(t^2-2)2t)\,dt = ... = 12 + 0 = 12 \ .$$

6. Riktningsderivatan ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\|\bar{u}\| = 1$. Denna är störst då $\bar{u} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.
$\nabla f = (\dfrac{1}{1+(x+y)^2} + ye^{xy}, \dfrac{1}{1+(x+y)^2} + xe^{xy}) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$. Det ger $\bar{u} = \dfrac{(1,3)}{\sqrt{10}}$.

7. Skärningskurvans projektion på $xy -$ planet ges av
$8 - (x^2 + y^2) = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. Områdets projektion på $xy -$ planet, D , är då cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Volymen av området R beräknas:
$$\iiint_R dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{8-(x^2+y^2)} dz = 2\iint_D (4 - (x^2+y^2))\,dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 16\pi \ ve.$$

Del 2

8. Funktionen är ett polynom som sammanfaller med sin Maclaurinutveckling. Eftersom termer av ordning 1 saknas gäller att $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ .Det betyder att origo är en kritisk punkt för alla värden på a . Man utläser även andraderivatornas värden i origo:
$A = f_{11}(0,0) = 8a$, $B = f_{12}(0,0) = a^2$, $C = f_{22}(0,0) = 2a$.$\Rightarrow AC - B^2 = a^2(16 - a^2)$.
Detta kan naturligtvis även fås genom derivering på vanligt sätt. Vi ser nu att $AC - B^2 > 0$ om $-4 < a < 4$. Eftersom $A > 0$ för $0 < a < 4$ ger detta ett lokalt min. Eftersom $A < 0$ för $-4 < a < 0$ ger detta ett lokalt max. Om $a < -4$ eller $a > 4$ fås inget extremvärde (sadelpunkt) . För $a = 0$ och $a = \pm 4$ gäller att $AC - B^2 = 0$. Då ger ovan använda test ingen information. Vi studerar då hur f uppför sig nära origo:
$a = -4 \Rightarrow f(x,y) = (2x - y)^2(x - 4) \leq 0 = f(0,0)$ i en omgivning av origo $\Rightarrow$ lokalt max.
$a = 0 \Rightarrow f(x,y) = (4x^2 + y^2)x$ dvs f växlar tecken i varje omgivning till origo $\Rightarrow$ sadelpkt.
$a = 4 \Rightarrow f(x,y) = (2x + y)^2(x + 4) \geq 0 = f(0,0)$ i en omgivning av origo $\Rightarrow$ lokalt min.

9. Vi sluter ytan S genom att lägga till den plana cirkelskivan $S_1 : x^2 + y^2 \leq 1$ i $xy-$planet och kan då använda divergenssatsen:

$$\oiint_{S+S_1} \overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_R div\overline{F} dxdydz = \iiint_R (2xy + 1 - y) dxdydz = \{symm\} = \iiint_R dxdydz = V$$ där V

är volymen av det inneslutna området R som är ett halvklot. Vi får $V = \frac{1}{2}\frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Från detta måste vi nu dra bort flödet ner genom ytan S_1 :

$$\iint_{S_1} \overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_{S_1} (x^2 y, y, x^2) \cdot (0,0,-1) dS = \iint_{S_1} (-x^2) dS = -\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^1 r^2 r dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{4} .$$

Det sökta flödet är alltså $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{11\pi}{12}$.

10. Vi definierar $F(x, y, z, u) = z^2 + zu - u^2 - x$ och $G(x, y, z, u) = 2zu + u^2 - y$. Den givna punkten uppfyller då systemet $\begin{cases} F(x, y, z, u) = 0 \\ G(x, y, z, u) = 0 \end{cases}$. Vi beräknar Jacobimatrisen $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)} = \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix}$ som i den givna punkten är $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Då dess determinant är $14 \neq 0$ är existensen av de två funktionerna klar enligt ”implicita funktionssaten”. De båda sökta derivatorna kan fås genom implicit derivering map x resp y i systemet ovan. Detta kan göras var för sig eller på matrisnivå:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}\frac{\partial(z,u)}{\partial(x,y)} = O \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I den givna punkten fås $\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ vilket ger

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{7}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{14}$.

11. Det räcker att visa att de båda vektorerna är linjärt oberoende. Låt $a\overline{u} + bT(\overline{u}) = \overline{0}$. Vi skall visa att $a = b = 0$. Operera med T: $aT(\overline{u}) + bT^2(\overline{u}) = T(\overline{0}) = \overline{0}$. Eftersom $T^2(\overline{u}) = \overline{0}$ och $T(\overline{u}) \neq \overline{0}$ ger detta $a = 0$. Insättning i den första ekvationen ovan ger $bT(\overline{u}) = \overline{0} \Rightarrow b = 0$ och beviset är klart.