KTH Matematik

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Måndagen den 21 augusti 2006 kl 0800-1300.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. För den linjära operatorn T på $\mathbf{R}^3$ gäller att
   $T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $T(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $T(\bar{e}_3) = -3\bar{e}_2$
   där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ är standardbasen i $\mathbf{R}^3$**.** Avgör om T är inverterbar.

2. Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

3. Undersök om funktionen $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ i området $x^2 + y^2 \le 9$.

5. Beräkna linjeintegralen $\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$ där C är den kurva som är sammansatt av den räta linjen från origo till punkten $(2,2)$ och parabeln $y = x^2 - 2$ från punkten $(2,2)$ till punkten $(-2,2)$.

6. I vilken riktning, utgående från punkten $(1,0)$, växer funktionen $f(x,y) = \arctan(x+y) + e^{xy}$ snabbast?

7. Beräkna volymen av det ändliga område som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$ och $z = 8 - (x^2 + y^2)$.

VGV

Del 2

8. För vilka värden på konstanten a har funktionen $f(x,y) = (4x^2 + axy + y^2)(x + a)$ ett lokalt extremvärde i origo? Ange också extrempunktens karaktär.

9. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (x^2 y, y + z, x^2 - yz)$ upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ för vilken $z \geq 0$.

10. Visa att det finns en omgivning av punkten $(x, y, z, u) = (1,-3,2,-1)$ i vilken ekvationssystemet $\begin{cases} x = z^2 + zu - u^2 \\ y = 2zu + u^2 \end{cases}$ definierar två (kontinuerligt deriverbara) funktioner $z(x,y)$ och $u(x,y)$. Beräkna $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ i punkten $(x,y) = (1,-3)$.

11. Låt T vara en linjär operator på $\mathbf{R}^2$ och $\overline{u}$ en vektor som uppfyller $T(\overline{u}) \neq \overline{0}$ och $T^2(\overline{u}) = \overline{0}$. Visa att $\{\overline{u}, T(\overline{u})\}$ är en bas i $\mathbf{R}^2$.