Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 070522.

Del 1

1. Matrisen ges av $[T]=[T_3][T_2][T_1]$ där

$$[T_1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},[T_2]=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix} \text{ och } [T_3]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Vi får $[T]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}$.

2. $\bar{v}$ är en egenvektor till matrisen A om $A\bar{v}=\lambda\bar{v}$ där λ är en skalär.

$$A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

Det betyder att alla utom vektorn $(1,3,2)$ är egenvektorer till matrisen. Vi ser också att egenvärdena är -1, 1 och 3. Då dessa är olika är matrisen diagonaliserbar.

3. Riktningsderivatan i riktningen $\bar{u}$ ges av $D_{\bar{u}}f=\nabla f\cdot\bar{u}$ där $\nabla f=(f_1,f_2)$ och riktningsvektorn $\bar{u}$ uppfyller $\|\bar{u}\|=1$. $\nabla f\cdot\bar{u}=\|\nabla f\|\|\bar{u}\|\cos\theta=\|\nabla f\|\cos\theta$ är som störst då vinkeln θ mellan ∇f och $\bar{u}$ är 0 radianer. Då fås $D_{\bar{u}}f(1,2)=\|\nabla f(1,2)\|$.

$\nabla f=(y-\dfrac{5}{x+y^2},x-\dfrac{10y}{x+y^2})\Rightarrow\nabla f(1,2)=(1,-3)$. Det största värdet är alltså $\|(1,-3)\|=\sqrt{10}$.

4. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt i det inre av området eller i en randpunkt eftersom singulära punkter saknas.

$\begin{cases}f_1=3y^2=0\\ f_2=6xy=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$. Enda intressanta punkten i det inre är alltså origo.

Randen: $y^2=\frac{1}{2}(1-x^2)\Rightarrow h(x)=\frac{3}{2}x(1-x^2)+1$, $-1\le x\le 1$. Vi söker kritiska punkter: $h'(x)=\frac{3}{2}(1-3x^2)=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Intressanta är också ändpunkterna i definitionsområdet till h.

Funktionsvärdena i ovan nämnda punkter är 1, $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1.

Det största värdet är alltså $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ och det minsta $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Greens formel ger $\iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}x)\,dxdy = 2\iint_D x\,dxdy$ där området D begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = x+6$. Dubbelintegralen blir

$$2\int_{-2}^{3} x\,dx \int_{x^2}^{x+6} dy = 2\int_{-2}^{3} x(x+6-x^2)\,dx = \ldots = \frac{125}{6}.$$

6. Vi uppfattar ytan som nivåytan $F = 0$ till ytan $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9$. En normalvektor till ytan ges av $\nabla F = (4x, 6y, 2z)$. I punkten (1,-1,2) gäller att $\nabla F = (4,-6,4)$. Vi kan välja $\overline{n} = (2,-3,2)$ som det sökta planets normalvektor och får $2x - 3y + 2z = C$. Insättning av punkten ger tangentplanets ekvation: $2x - 3y + 2z = 9$.

7. Vektorfältet $\overline{F}$ är definierat i hela $\mathbf{R}^3$ som är enkelt sammanhängande. $\overline{F}$ är då konservativt om och endast om dess Jacobimatris J är symmetrisk.

$$J = \begin{bmatrix} -yze^x & \cos z - ze^x & -y\sin z - ye^x \\ \cos z - aze^x & 2 & -x\sin z - ae^x \\ -ye^x - y\sin z & -e^x - x\sin z & 2 - xy\cos z \end{bmatrix}.$$ Vi ser att a måste vara 1.

$\overline{F} = \nabla\phi$ ger systemet $\begin{cases} \phi_1 = y\cos z - yze^x & (1) \\ \phi_2 = x\cos z - ze^x + 2y & (2) \\ \phi_3 = 2z - ye^x - xy\sin z & (3) \end{cases}$ Ur (1) får vi

$\phi(x,y,z) = xy\cos z - yze^x + f(y,z)$. Detta ger i (2): $f_1 = 2y \Rightarrow f(y,z) = y^2 + g(z)$ dvs $\phi(x,y,z) = xy\cos z - yze^x + y^2 + g(z)$. Insättning i (3) ger $g'(z) = 2z \Rightarrow g(z) = z^2 + C$. Med $C = 0$ fås $\phi(x,y,z) = xy\cos z - yze^x + y^2 + z^2$.

Del 2

8. Vi använder Lagranges metod och söker minimum av avståndsfunktionens kvadrat (av räknetekniska skäl) under bivillkoret $z = xy + 3$. Vi bildar Lagrangefunktionen

$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy - z + 3)$. Den eller de punkter som ger det kortaste avståndet finns bland de kritiska punkterna till denna funktion. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = 2x + \lambda y \quad = 0 & (1) \\ L_2 = 2y + \lambda x \quad = 0 & (2) \\ L_3 = 2z - \lambda \quad\;\; = 0 & (3) \\ L_4 = xy - z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$ Om $x \neq 0$, $y \neq 0$ ger (1) och (2) $y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$.

$y = x$: (1) $\Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow z = -1$. (4) ger då $x^2 + 4 = 0$ dvs omöjligt.

$y = -x$: (1) $\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow z = 1$. (4) ger då $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Detta ger punkterna $(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ och $(-\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. Dessa punkter ger avståndet $\sqrt{5}$.

Om $x = 0$ blir $y = 0$ och tvärtom. (4) ger då $z = 3$ dvs punkten $(0,0,3)$. Denna punkt ger avståndet 3 . Det kortaste avståndet är alltså $\sqrt{5}$.

9. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x} + K\bar{x} + 8 = 0$ där $\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$ och $K = \begin{bmatrix} 50 & 100 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} \lambda - 7 & 24 \\ 24 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 625 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 25 .$$ Normerade egenvektore söks:

$$\lambda = 25 : \begin{bmatrix} 18 & 24 & 0 \\ 24 & 32 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -25 : \begin{bmatrix} -32 & 24 & 0 \\ 24 & -18 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') + 8 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' + 8 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} 50 & 100 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0 \Rightarrow 25(x')^2 - 25(y')^2 - 20x' + 110y' + 8 = 0 .$$

Kvadratkomplettering ger $(x' - \frac{2}{5})^2 - (y' - \frac{11}{5})^2 + 5 = 0$. Med koordinatbytet

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{2}{5} \\ y'' = y' - \dfrac{11}{5} \end{cases}$$ som är en translation fås slutligen $\dfrac{(y'')^2}{(\sqrt{5})^2} - \dfrac{(x'')^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ dvs kurvan är en hyperbel.

10. $rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y^3\cos z & x^3 e^z & xyz \end{vmatrix} = (xz - x^3 e^z, x + y^3 \sin z - yz, 3x^2 e^z + 3y^2 \cos z)$.

Ytan S : s ekvation kan skrivas $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(z-1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ dvs den är en ellipsoid med centrum i punkten $(0,0,1)$. Endast den del som är ovanför xy – planet är aktuell. Vi vill använda divergenssatsen och lägger till den cirkelskiva D som fås då $z = 0$ dvs $x^2 + y^2 \le 4$. $divrot\overline{F} = z - 3x^2 e^z + 3y^2 \sin z - z + 3x^2 e^z - 3y^2 \sin z = 0$. Om det inneslutna området kallas K får vi enligt divergenssatsen:

$$\oiint_{S+D} (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K divrot\overline{F} dxdydz = 0 \Rightarrow \iint_S (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS = -\iint_D (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS .$$

På D gäller att $z = 0$ och att $\hat{N} = (0,0,-1)$ (utåtriktad normal). Det ger integralen

$$-\iint_D (-x^3, x, 3x^2 + 3y^2) \cdot (0,0,-1) dxdy = 3\iint_D (x^2 + y^2) dxdy = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 r dr = 24\pi .$$

11. Låt $y = f(x,z) = \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}$. Det ger

$$dS = \sqrt{(f_1)^2 + (f_1)^2 + 1}\, dxdz = \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{1 - (x^2 + z^2)} + 1}\, dxdz = \frac{dxdz}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}} .$$

Detta är projektionen av ytelementet på xz – planet. Ytans projektion är området D som i x – led begränsas av cirkelbågarna $x = \pm\sqrt{1 - z^2}$ och i z – led av linjerna $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi observerar att $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ på S och får:

$$Q = \iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS = \iint_D \frac{dxdz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx = 2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dz = 2\sqrt{2} .$$

Alternativt kan man använda sfäriska koordinater.