Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Tisdagen den 22 maj 2007 kl 0800-1300.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3p erhålls på någon av de fem första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng.
Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Bestäm standardmatrisen för den linjära operator på $\mathbf{R}^2$ som sammansätts av en ortogonal projektion på $x-$axeln följd av en rotation moturs 60° följd av en spegling i $y-$axeln.

2. Avgör vilka av vektorerna (0,1,1) , (1,3,2) , (2,1,1) och (0,3,-1) som är egenvektorer till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
Är matrisen diagonaliserbar? Motivera!

3. Bestäm det största värde riktningsderivatan av funktionen $f(x,y) = xy - 5\ln(x+y^2)$ i punkten (1,2) kan anta.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 3xy^2 + 1$ på den slutna ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \le 1$.

5. Beräkna linjeintegralen $\oint_C x\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$ där C är den kurva som sammansätts av parabeln $y = x^2$ från punkten (-2,4) till punkten (3,9) och den räta linjen därifrån tillbaka till punkten (-2,4) .

6. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (1,-1,2) till ellipsoiden $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0$.

VGV

7. Bestäm konstanten a så att vektorfältet
$\overline{F} = (y\cos z - yze^{x},\ x\cos z - aze^{x} + 2y,\ 2z - ye^{x} - xy\sin z)$
blir konservativt. Bestäm sedan en potential till detta vektorfält.

Del 2

8. Bestäm det kortaste avståndet från origo till ytan $z = xy + 3$.

9. Avgör vilken typ av kägelsnitt (conic) som beskrivs av ekvationen
$7x^2 - 48xy - 7y^2 + 50x + 100y + 8 = 0$.
Rotera och translatera koordinatsystemet så att kurvan hamnar på huvudaxelform (standard position) . Ange formlerna för de koordinatbyten som görs samt kurvans ekvation i det slutliga koordinatsystemet.

10. Låt $\overline{F} = (xz - y^3\cos z,\ x^3e^{z},\ xyz)$. Beräkna flödet av vektorfältet $rot\overline{F}$ $(curl\overline{F})$ genom den del av ytan $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$ för vilken $z \geq 0$. Ytans normalvektor pekar så att dess $z-$komponent är positiv för $z > 1$ och negativ för $0 \leq z < 1$.

11. Ett elektriskt laddat skal S utgörs av den del av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ som begränsas av planen $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ och $z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Laddningstätheten ges av $q(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
Beräkna skalets totala laddning som ges av $Q = \iint_S q(x,y,z)\,dS$.