Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 070828.

Del 1

1. Standardmatrisens kolumner ges av $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$. Låt $T = T_1T_2$ där T_1 är spegling i linjen $y = x$ och T_2 är spegling i $x-$axeln. Då gäller att $T(\bar{e}_1) = T_2(T_1(\bar{e}_1)) = T_2(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2$, $T(\bar{e}_2) = T_2(T_1(\bar{e}_2)) = T_2(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$. Det ger standardmatrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Vi söker matrisens egenvärden:
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[\lambda(\lambda-1)] + 1\cdot[1-7(\lambda-1)] = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0.$$
Division med $\lambda - 2$ ger en faktor $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$. Matrisen har alltså egenvärdet 2 med multiplicitet 3. Vi söker egenvektorerna:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Vi ser att det blir endast en parameter i lösningen vilket innebär att egenrummets dimension är ett. Då kan vi inte välja tre linjärt oberoende egenvektorer dvs matrisen är inte diagonaliserbar.

3. Tangentplanets ekv ges av $((x,y,z)-(1,-1,1))\cdot\nabla f(1,-1,1) = 0$. Gradienten beräknas: $\nabla f(x,y,z) = (2xy+z^2, x^2+2yz, y^2+2xz) \Rightarrow \nabla f(1,-1,1) = (-1,-1,3)$. Det ger $(x-1, y+1, z-1)\cdot(-1,-1,3) = 0 \Rightarrow -x+1-y-1+3z-3 = 0 \Rightarrow x+y-3z+3 = 0$.

4. De kritiska punkterna fås ur systemet
$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{y} - \dfrac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{8}. \\ f_2 = -\dfrac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$
Insättning i den andra ekvationen ger
$\dfrac{64}{x^3} + 1 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = 2$. Det ger en kritisk punkt (-4,2) .Vi beräknar andraderivatorna:
$f_{11} = \dfrac{16}{x^3}$, $f_{12} = -\dfrac{1}{y^2}$, $f_{22} = \dfrac{2x}{y^3}$. Hesses matris i punkten är $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$. Huvuddiagonal-determinanternas teckenväxling är - + vilket ger maximum.

5. Låt D beteckna triangelskivan.Greens formel ger då

$$\oint_C xy^2 dx + 5x^2 y\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(5x^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right) = 8\iint_D xy\,dxdy = 8\int_0^1 xdx\int_x^1 y\,dy = 8\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx =$$

$$= 4\int_0^1 (x - x^3)\,dx = ... = 1\ .$$

6. Vi ser att området utgörs av en triangelskiva med hörn i punkterna $(0,0)$, (π,π) och $(0,\pi)$. Då detta område är både $x-$ och $y-$ enkelt kan vi även skriva integralen som

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \int_0^y dx = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\cdot y\,dy = \left[-\cos y\right]_0^\pi = 2\ .$$

7. Flödet ges av $\iint_S (4y,-3x,z+x^2)\cdot \hat{N}dS$ där S är den givna ytan. Det gäller att

$\hat{N}dS = \pm(-z_1,-z_2,1)\,dxdy = (-6x,-8y,1)\,dxdy$ där det positiva tecknet valts. Låt D vara enhetscirkelskivan. Flödet ges då av

$$\iint_D (4y,-3x,3x^2+4y^2+x^2)\cdot(-6x,-8y,1)\,dxdy = 4\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \{\textit{polära koord}\} =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = 8\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\ .$$

Del 2

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området begränsas av en ellipsbåge och ett linjestycke. Vi studerar först det inre:

$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen: På linjestycket $y = 7$ fås $g(x) = f(x,7) = 7x$, $-2 \le x \le 2$. g saknar kritiska punkter. Randpunkterna ger $g(-2) = -14$, $g(2) = 14$. Kritiska punkter på ellipsen fås t ex med hjälp av Lagranges multiplikatormetod: Låt $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 100)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = y + 2\lambda x & = 0 \quad (1) \\ L_2 = x + 8\lambda y & = 0 \quad (2) \\ L_3 = x^2 + 4y^2 - 200 & = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Ur (1) och (2) fås $\lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{x}{8y} \Rightarrow x^2 = 4y^2$.

Insättning i (3) ger $x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \Rightarrow y = \pm 5$. Detta ger punkter som dock inte ligger på "vår" del av ellipsen. Det största värdet är alltså 14 och det minsta är -14 .

9. Den övre delen av konen (där $z \geq 0$) är funktionsytan $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Projektionen på xy - planet av ytstycket i fråga är det obegränsade området $0 \leq x \leq \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 3$. Arean ges då av den generaliserade integralen

$$\int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + 1}\, dy = \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\, dy =$$

$$= \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{2}\, dy = \sqrt{2}\int_3^\infty \frac{dx}{x^2} = \sqrt{2} \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_3^R = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3} - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

10. Låt $F(x,y,z) = 2xyz - z^3$. Detta ger

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 3z^2 = \begin{cases} 0 & ,(x,y,z) = (2,3,2) \\ -28 & ,(x,y,z) = (5,2,4) \end{cases}$$ Alltså är, enligt implicita funktionssatsen, ytan grafen av en kontinuerligt deriverbar funktion i en omgivning av punkten (5,2,4) . Detta innebär att $F(x,y,z(x,y)) = 0$. Derivering map x och y ger

$\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. I punkten (5,2,4) gäller då att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2yz}{2xy - 3z^2} = -\frac{16}{-28} = \frac{4}{7},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xz}{2xy - 3z^2} = -\frac{40}{-28} = \frac{10}{7}.$$

I punkten (2,3,2) hade vi $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ medan t ex $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2yz = 12 \neq 0$. Det följer att ytan inte kan skrivas på formen $z = z(x,y)$ (med z kontinuerligt deriverbar) i en omgivning av punkten (2,3,2) eftersom ovanstående implicitderivering med avseende på x skulle ge motsägelsen 12+0 = 0 .

11. Låt $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ vara en bas i $\mathbf{R}^3$. Matrisen för T i denna bas har kolumnerna $[T(\bar{v}_i)]_B$, $i = 1,2,3$. Basen måste alltså bestå av tre linjärt oberoende egenvektorer till T. Av avbildningens geometriska egenskap följer att linjens riktningsvektor $\bar{v}_1 = (1,2,3)$ avbildas på sig själv dvs $T(\bar{v}_1) = 1 \cdot \bar{v}_1$. Alltså är $\bar{v}_1$ en egenvektor med egenvärdet $\lambda = 1$. Om $\bar{v}$ är en vektor som är ortogonal mot $\bar{v}_1$ så avbildas $\bar{v}$ på $-\bar{v}$. Det betyder att $\bar{v}$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda = -1$. Genom att välja två linjärt oberoende vektorer $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$, båda ortogonala mot $\bar{v}_1$, får vi en bas relativt vilken

T har matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Detta eftersom t ex andra kolumnen ges av vektorn

$T(\bar{v}_2) = -\bar{v}_2 = 0 \cdot \bar{v}_1 - 1 \cdot \bar{v}_2 + 0 \cdot \bar{v}_3 \Rightarrow (T(\bar{v}_2))_B = (0,-1,0)$. Pss för de övriga kolumnerna.

Vi kan t ex välja $\bar{v}_2 = (2,-1,0)$, $\bar{v}_3 = (3,0,-1)$.